CONTRIBUCIONES A LOS FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS TRANSFINITOS

GEORG CANTOR

Título original: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre[1]
Mathematische Annalen **46**(1895), 481-512; **49**(1897), 207-246.

"Hypotheses non fingo." [Newton]
"Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus."
"Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."

§1.

La noción de cardinalidad o de número cardinal.

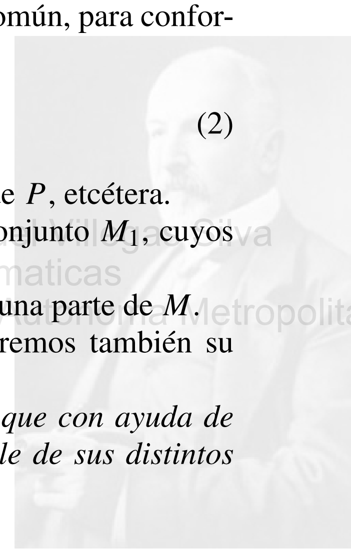
Por un "conjunto" entendemos cada colección M de objetos determinados m distinguibles entre sí por nuestra experiencia o nuestro pensamiento (que llamaremos los "elementos" de M) que conforman un todo.

En símbolos expresamos esto mediante:

$$M = \{m\}. \tag{1}$$

La unión de varios conjuntos $M, N, P, \ldots$, que no tengan elementos en común, para conformar uno sólo la denotamos como

$$(M, N, P, \ldots). \tag{2}$$



Los elementos de este conjunto son entonces los elementos de M, de N, de P, etcétera.

Llamamos "parte" o "subconjunto" de un conjunto M a cualquier *otro* conjunto M_1, cuyos elementos son a la vez elementos de M.

Si M_2 es una parte de M_1, y M_1 una parte de M, entonces M_2 es también una parte de M.

A cada conjunto M está asociada una cierta "cardinalidad", que llamaremos también su "número cardinal".

La "cardinalidad" o el "número cardinal" de M es la noción general, que con ayuda de nuestro intelecto surge del conjunto M, y que es independiente de la índole de sus distintos elementos m y de su orden.

[1]Traducción de Luis Miguel Villegas Silva, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, Iztapalapa, D. F., México, CP 09340, e-mail: `lmvs@xanum.uam.mx`

El resultado de este doble proceso de abstracción, la cardinalidad o el número cardinal de M, lo denotamos con[2]

$$\mid M \mid . \tag{3}$$

Puesto que de cada elemento m, sin considerar su índole, se forma una "unidad", el número cardinal mismo $|M|$ es un conjunto formado exclusivamente por unidades reunidas, que existe en nuestro espiritu como una imagen virtual o una proyección del conjunto dado M.

Llamaremos "equivalentes" a dos conjuntos M y N, lo que denotamos como

$$M \sim N \qquad o \qquad N \sim M, \tag{4}$$

cuando es posible relacionarlos de tal forma que cada elemento de uno de ellos corresponde a un y sólo un elemento del otro.

A cada parte M_1 de M corresponde entonces una determinada parte equivalente N_1 de N y viceversa.

Si se tiene tal correspondencia entre dos conjuntos equivalentes, ésta se puede modificar en varias formas (excepto en el caso en que cada uno de los conjuntos consista en un sólo elemento). A saber, siempre se puede tomar la prescripción de que un elemento particular m_0 de M corresponde a un cierto elemento n_0 de N. Porque si de acuerdo a la correspondencia original, el elemento m_0 no está asociado a n_0, sino que m_0 está asociado al elemento n_1 de N y el elemento n_0 al elemento m_1 de M, entonces se considera la correspondencia modificada, en la que m_0 está relacionado con n_0 así como $n_1$con m_1 y para el resto de los elementos se preserva la correspondencia original. Con esto se alcanza la meta original.

Cada conjunto es equivalente a sí mismo:

$$M \sim M. \tag{5}$$

Si dos conjuntos son equivalentes a un tercero, entonces también son equivalentes entre sí:

$$de \quad M \sim P \ \ y \, N \sim P \quad se\ deduce \quad M \sim N. \tag{6}$$

Es de gran importancia que *dos conjuntos M y N tienen el mismo número cardinal cuando y sólo cuando son equivalentes:*

$$de \quad M \sim N \quad se\ deduce \quad \mid M \mid = \mid N \mid \tag{7}$$

y

$$de \quad \mid M \mid = \mid N \mid \quad se\ deduce \quad M \sim N. \tag{8}$$

Así que la equivalencia de conjuntos proporciona el criterio necesario y suficiente para la igualdad de sus números cardinales.

De hecho, de acuerdo a la definición anterior de cardinalidad el número cardinal $|M|$ permanece invariable cuando se sustituye un elemento o varios o incluso todos los elementos m de M por otro objeto.

Ahora, si $M \sim N$, entonces está presente una correpondencia a través de la cual M y N se cubren entre sí; en tal situación a cada elemento m de M corresponde un elemento n de N. En consecuencia, podemos pensar que cada elemento m de M se sustituye por el elemento n de N, con lo que se transforma M en N sin cambio del número cardinal; por consiguiente,

$$\mid M \mid = \mid N \mid . \tag{8}$$

[2]Nota del traductor: en el texto original Cantor denota la cardinalidad de un conjunto M con $\overline{\overline{M}}$. Hemos considerado adecuado usar, en cambio, la notación maás usual actualmente:

$$\mid M \mid .$$

El recíproco del teorema se obtiene al observar que entre los elementos de M y las distintas unidades de su número cardinal $|M|$ está presente una correspondencia recíprocamente unívoca. Porque, como se observa, $| \ M \ |$ surge de M, de tal forma que de cada elemento m de M se obtiene una unidad particular de $| \ M \ |$. Por ello podemos decir que

$$M \sim |M|. \tag{9}$$

De la misma forma $N \sim | \ N \ |$. Por lo que si $| \ M \ | = | \ N \ |$, se sigue de (6) que $M \sim N$.

También podemos derivar directamente de la noción de equivalencia el siguiente teorema:

Si $M, N, P, \ldots$ son conjuntos que no tienen elementos en común, $M', N', P', \ldots$ son conjuntos de tal característica y se cumple

$$M \sim M', \quad N \sim N', \quad P \sim P', \ldots,$$

entonces siempre se cumple que

$$(M, N, P, \ldots) \sim (M', N', P', \ldots).$$

§2.

"Menor" y "mayor" entre cardinalidades.

Si se satisfacen las *dos* condiciones siguientes para dos conjuntos M y N con número cardinal $\mathfrak{a} = | \ M \ |$ y $\mathfrak{b} = | \ N \ |$:

1) no existe ninguna parte de M equivalente a N,
2) existe una parte N_1 de N, tal que $N_1 \sim M$,

entonces, primero es claro que lo mismo sigue siendo válido cuando se sustituyen M y N por conjuntos equivalentes M' y N'; *por consiguiente esas condiciones expresan una cierta relación entre los números cardinales* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$.

Además, *está excluida la equivalencia de M y N, es decir, la igualdad de* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$; en caso contrario se tendría $M \sim N$, de donde se deduciría, ya que $N_1 \sim M$, que $N_1 \sim N$ por lo que debería existir una parte M_1 de M, puesto que $M \sim N$, tal que $M_1 \sim M$, y también $M_1 \sim N$, lo que contradice la condición 1).

Tercero, *la relación de* $\mathfrak{a}$ *con* $\mathfrak{b}$ *es tal que la misma relación de* $\mathfrak{b}$ *con* $\mathfrak{a}$ *es imposible*; pues si en 1) y 2) intercambiamos los papeles de M y N, se originan dos relaciones contradictorias entre sí.

Expresamos de la siguiente forma la relación de $\mathfrak{a}$ *con* $\mathfrak{b}$ *caracterizada por las condiciones 1) y 2):* $\mathfrak{a}$ *es menor que* $\mathfrak{b}$*, o también :* $\mathfrak{b}$ *es mayor que* $\mathfrak{a}$, en símbolos

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \quad \text{o} \quad \mathfrak{b} > \mathfrak{a}. \tag{1}$$

Se prueba fácilmente que

$$\text{si} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \ \ \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \text{entonces siempre se cumple} \ \ \mathfrak{a} < \mathfrak{c}. \tag{2}$$

También se sigue sin dificultad de la definición, que *si P_1 es una parte del conjunto P, de* $\mathfrak{a} < | \ P_1 \ |$ *siempre se deduce que* $\mathfrak{a} < | \ P \ |$ *y de* $| \ P \ | < \mathfrak{b}$ *siempre se sigue que también* $| \ P_1 \ | < \mathfrak{b}$.

Hemos visto que en las tres relaciones

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$$

cada una excluye a las otras dos.

Por el contrario, de ninguna manera se sobrentiende, y dificilmente puede ser demostrado en este momento de nuestra disertación, que entre cualesquiera dos números cardinales $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *se deba cumplir alguna de esas relaciones.*

Dr. Luis Miguel Villegas Silva Depto. Matematicas Universidad Autonoma Metropolitana Iztapalapa Mexico

Después, hasta que hallamos analizado la sucesión creciente de los números cardinales transfinitos y tengamos conocimientos sobre las relaciones entre ellos, se obtendrá la veracidad del teorema:

A. *"Si $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ son dos números cardinales arbitrarios, entonces se cumple $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ o $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ o $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$."*

Fácilmente se derivan de este teorema los siguientes, de los que por el momento no podemos hacer uso:

B. *"Si dos conjuntos M y N se conforman de tal manera que M es equivalente a una parte N_1 de N y N es equivalente a una parte M_1 de M, entonces también M y N son equivalentes."*

C. *"Si M_1 es una parte del conjunto M, M_2 una parte del conjunto M_1, y los conjuntos M_2 y M son equivalentes, entonces M_1 también es equivalente a M y a M_2."*

D. *"Si para dos conjuntos M y N se satisface la condición de que N no es equivalente a M ni a una parte de M, entonces existe una parte N_1 de N, que es equivalente a M."*

E. *"Cuando dos conjuntos M y N no son equivalentes, y existe una parte N_1 de N, equivalente con M, entonces ninguna parte de M es equivalente con N."*

§3.

La adición y multiplicación de cardinalidades.

La unión de dos conjuntos M y N, que no tienen elementos en común, se denotó en §1, (2) con (M, N). La llamamos el *"conjunto unión de M y N"*.

Si M' y N' son otros dos conjuntos sin elementos en común, y se cumple $M \sim M'$, $N \sim N'$, entonces se observa que también se cumple

$$(M, N) \sim (M', N').$$

De lo anterior se sigue que el número cardinal de (M, N) sólo depende de los números cardinales $| M |= \mathfrak{a}$ y $| N |= \mathfrak{b}$.

Esto conduce a la definición de la suma de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$, si hacemos

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} =| (M, N) | . \tag{1}$$

Ya que la noción de cardinalidad es independiente del orden de los elementos, se sigue sin dificultad que

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \tag{2}$$

y para cualesquiera tres números cardinales $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}. \tag{3}$$

Ahora atendemos la multiplicación.

Cada elemento m de un conjunto M se puede enlazar con cada elemento n de otro conjunto N para formar un nuevo elemento (m, n); para el conjunto de todos estos enlaces (m, n) introducimos la notación $(M \cdot N)$. Llamamos a este conjunto *"el conjunto enlace de M y N"*. Se tiene entonces

$$(M \cdot N) = \{(m, n)\}. \tag{4}$$

Se verifica también que la cardinalidad de $(M \cdot N)$ sólo depende de las cardinalidades $| M |= \mathfrak{a}$, $| N |= \mathfrak{b}$; porque, si se sustituyen los conjuntos M y N por conjuntos equivalentes a ellos

$$M' = \{m'\} \quad \text{y} \quad N' = \{n'\}$$

y se consideran m, m' así como n, n' como elementos asociados, el conjunto

$$M' \cdot N' = \{(m', n')\}$$

se puede poner en correspondencia recíprocamente unívoca con $(M \cdot N)$, si se consideran asociados los elementos (m, n) y (m', n'); así, se cumple que

$$(M' \cdot N') \sim (M \cdot N). \tag{5}$$

Ahora definimos el producto $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ mediante la ecuación:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mid (M \cdot N) \mid . \tag{6}$$

Un conjunto con número cardinal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ se puede generar a partir de dos conjuntos M y N con números cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ mediante la siguiente prescripción: se parte del conjunto N y se sustituye en él cada elemento n por un conjunto $M_n \sim M$; si se colectan los elementos de todos estos conjuntos M_n en un todo S, entonces se verifca fácilmente que

$$S \sim (M \cdot N), \tag{7}$$

en consecuencia,

$$\mid S \mid = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}.$$

Pues dada una correspondencia entre los conjuntos equivalentes M y M_n, denotamos con m_n al elemento de M_n correspondiente a m, así que

$$S = \{m_n\}, \tag{8}$$

por lo que se pueden poner en correspondencia recíproca unívoca los conjuntos S y $(M \cdot N)$, relacionando el elemento m_n con el elemento (m, n).

De nuestras definiciones se siguen fácilmente los teoremas:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}, \tag{9}$$

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c} \tag{10}$$

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}, \tag{11}$$

porque

$$(M \cdot N) \sim (N \cdot M),$$
$$(M \cdot (N \cdot P)) \sim ((M \cdot N) \cdot P),$$
$$(M \cdot (N, P)) \sim ((M \cdot N), (M \cdot P)).$$

La adición y multiplicación de cardinalidades están sujetas a las leyes generales de conmutatividad, asociatividad y distributividad.

§4.

Exponenciación de cardinalidades.

Por una *"valuación del conjunto N con elementos del conjunto M"* o expresado en forma más simple, por una *"valuación de N en M"* entenderemos una ley, mediante la cual cada elemento n de N está asociado a un determinado elemento m de M, donde un mismo elemento de M puede utilizarse repetidamente. El elemento de M asociado a n es en cierto sentido una función unívoca de n y se puede denotar, digamos con $f(n)$; ella se llama "*función valuación* de n"; la valuación correspondiente de N se detota $f(N)$.

Dos valuaciones $f_1(N)$ y $f_2(N)$ se dicen iguales cuando y sólo cuando *para cada elemento n de N* se satisface la ecuación

$$f_1(n) = f_2(n), \tag{1}$$

de tal suerte, que si para algún elemento $n = n_0$ *no* se cumple esta ecuación, $f_1(N)$ y $f_2(N)$ se consideran valuaciones de N *distintas*.

Por ejemplo, si m_0 es un elemento particular de M, se puede imponer que para toda n

$$f(n) = m_0;$$

esta ley constituye una valuación particular de N en M.

Otro tipo de valuación se obtiene cuando m_0 y m_1 son dos elementos distintos de M, n_0 un elemento de N y se prescribe

$$f(n_0) = m_0,$$
$$f(n) = m_1$$

para toda n que sea distinta de n_0.

La totalidad de las valuaciones de N en M conforman un conjunto con elementos $f(N)$; llamamos a este conjunto el *"conjunto de valuaciones de N en M"* y lo denotamos por $(N \mid M)$. Se tiene que

$$(N \mid M) = \{f(N)\}. \tag{2}$$

Si $M \sim M'$ y $N \sim N'$, se deduce fácilmente que

$$(N \mid M) \sim (N' \mid M'). \tag{3}$$

El número cardinal de $(N \mid M)$ depende sólo de los números cardinales $\mid M \mid = \mathfrak{a}$ y $\mid N \mid = \mathfrak{b}$; él nos sirve para definir el exponente $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mid (N \mid M) \mid . \tag{4}$$

Para tres conjuntos arbitrarios M, N y P se demuestran con facilidad los teoremas:

$$((N \mid M) \cdot (P \mid M)) \sim ((N, P) \mid M), \tag{5}$$
$$((P \mid M) \cdot (P \mid N)) \sim ((P \mid (M \cdot N)), \tag{6}$$
$$(P \mid (N \mid M)) \sim ((P \cdot N) \mid M), \tag{7}$$

de los que, si se establece $\mid P \mid = \mathfrak{c}$, por (4) y teniendo en cuenta §3 obtenemos los teoremas siguientes para números cardinales arbitrarios $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} + \mathfrak{c}}, \tag{8}$$
$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}}, \tag{9}$$
$$(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}}. \tag{10}$$

Qué tan valiosas y trascendentes son estas fórmulas sobre cardinalidades, se reconoce en los siguientes ejemplos:

Denotemos con $\mathfrak{o}$ la cardinalidad del continuo lineal X (es decir, la totalidad X de los números reales x, ≥ 0 y ≤ 1), se deduce sin dificultad que este se puede representar entre otras formas, mediante la ecuación

$$\mathfrak{o} = 2^{\aleph_0}, \tag{11}$$

donde el significado de $\aleph_0$ se aclara en §6.

De hecho, según (4), $2^{\aleph_0}$ no es otra cosa que la cardinalidad de todas las representaciones

$$x = \frac{f(1)}{2} + \frac{f(2)}{2^2} + \cdots + \frac{f(\nu)}{2^\nu} + \cdots \quad (\text{donde } f(\nu) = 0 \text{ o } 1) \tag{12}$$

de los números x en sistema binario. Notemos que cada número x sólo tiene una representación con excepción de los números $x = \frac{2\nu+1}{2^\mu} < 1$, que se representa en dos formas, entonces tenemos, si denotamos con $\{s_\nu\}$ la totalidad "numerable" de estos, primero

$$2^{\aleph_0} = \mid (\{s_\nu\}, X) \mid .$$

Si de X quitamos algún conjunto "numerable" $\{t_\nu\}$ y denotamos el resto con X_1, se cumple que

$$X = (\{t_\nu\}, X_1) = (\{t_{2\nu-1}\}, \{t_{2\nu}\}, X_1),$$
$$(\{s_\nu\}, X) = (\{s_\nu\}, \{t_\nu\}, X_1),$$
$$\{t_{2\nu+1}\} \sim \{s_\nu\}, \quad \{t_{2\nu}\} \sim \{t_\nu\}, \quad X_1 \sim X_1,$$

con lo que

$$X \sim (\{s_\nu\}, X),$$

así que (§1)

$$2^{\aleph_0} = \mid X \mid = \mathfrak{o}.$$

De (11) se sigue al elevar al cuadrado que (§6, (6))

$$\mathfrak{o} \cdot \mathfrak{o} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{o}$$

y después de multiplicar repetidamente por $\mathfrak{o}$

$$\mathfrak{o}^\nu = \mathfrak{o}, \tag{13}$$

donde ν es un número cardinal finito.

Si se eleva ambos lados de (11) a la potencia $\aleph_0$, se obtiene

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}.$$

Pero según §6, (8) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, por lo que

$$\mathfrak{o}^{\aleph_0} = \mathfrak{o}. \tag{14}$$

Las fórmulas (13) y (14) no tienen otro significado que: "Tanto el continuo n-dimensional como el $\aleph_0$-dimensional tienen la cardinalidad del continuo monodimensional." Así que todo el contenido del trabajo en el volumen 84 del Crelles Journal, pág. 242 se deriva de las fórmulas elementales del cálculo de cardinalidades en forma puramente algebraica.

§5.

Los números cardinales finitos

Primero se debe mostrar como los principios expuestos, sobre los cuales se basará después la teoría de los números cardinales infinitos o transfinitos, también proporcionan la fundamentación más breve, natural y formal de la teoría de números finitos.

Un único objeto e_0, cuando lo consideramos como un conjunto $E_0 = \{e_0\}$, corresponde al número cardinal que llamamos "uno" y denotamos con 1; tenemos

$$1 = \mid E_0 \mid . \tag{1}$$

Ahora se une con E_0 otro objeto e_1, el conjunto unión se llama E_1, de tal suerte que

$$E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1). \tag{2}$$

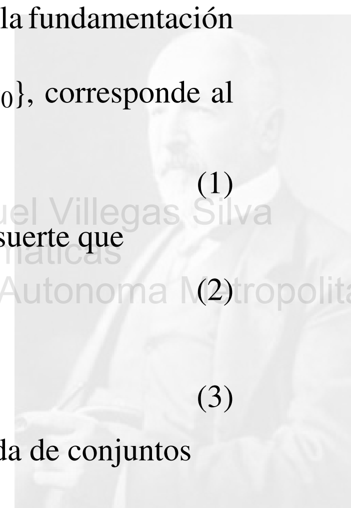
El número cardinal de E_1 se llama "dos" y se denota con 2:

$$2 = \mid E_1 \mid . \tag{3}$$

Mediante la adición de nuevos elementos obtenemos la sucesión no acotada de conjuntos

$$E_2 = (E_1, e_2), \quad E_3 = (E_2, e_3), \dots ,$$

que nos proporciona los restantes, denotados $3, 4, 5, \dots$ llamados *números cardinales finitos*. El uso de los mismos números como índices se justifica porque un número se usa con este



significado una vez que se ha introducido como número cardinal. Tenemos, si por $\nu - 1$ se entiende el número que antecede inmediatamente a ν en la sucesión,

$$\nu =\mid E_{\nu-1} \mid, \tag{4}$$

$$E_\nu = (E_{\nu-1}, e_\nu) = (e_0, e_1, \dots, e_\nu). \tag{5}$$

De la definición de suma en §3 se sigue que

$$\mid E_\nu \mid = \mid E_{\nu-1} \mid +1, \tag{6}$$

es decir, cada número cardinal finito (excepto 1) es la unión del inmediato previo y el 1.

De nuestra disertación resaltan los siguientes tres teoremas:

A. "*Los miembros de la sucesión no acotada de números cardinales finitos*

$$1, 2, 3, \dots \nu, \dots$$

son distintos entre sí (es decir, la condición de equivalencia planteada en §1 no se satisface entre los conjuntos correspondientes)".

B. "*Cada uno de estos números ν es mayor que sus predecesores y menor que sus sucesores (§2).*"

C. "*No existe un número cardinal que esté, por su magnitud, entre dos vecinos ν y $\nu+1$ (§2)*".

La demostración de estos teoremas se sostiene en los siguientes teoremas D y E, que primero se deben justificar.

D. *"Si M es un conjunto con la propiedad de que ninguno de sus subconjuntos tenga la misma cardinalidad que él, entonces también el conjunto (M, e), que se obtiene de M mediante la adición de un único elemento nuevo e, tiene la propiedad de que ninguno de sus subconjuntos tiene la misma cardinalidad que él."*

E. *" Si N es un conjunto con cardinalidad finita ν, N_1 un subconjunto de N, entonces el número cardinal de N_1 es igual a alguno de los números previos* $1, 2, 3, \dots \nu - 1$*."*

Demostración de *D*. Supongamos que existe un conjunto (M, e), uno de cuyos subconjuntos, llamémosle N, tiene la misma cardinalidad que él, entonces se distinguen dos casos, y ambos conducen a una contradicción: 1) El conjunto N contiene e como elemento; sea $N = (M_1, e)$; entonces M_1 es un subconjunto de M, porque N es un subconjunto de (M, e). Como vimos en §1, la correspondencia supuesta entre los conjuntos (M, e) y (M_1, e) se puede modificar de tal forma que el elemento e de uno corresponde al mismo elemento e del otro; en consecuencia, M y M_1 se pueden hacer corresponder en forma unívoca. Pero esto contradice la hipótesis de que M y su subconjunto M_1 no pueden tener la misma cardinalidad.

2) El subconjunto N de (M, e) no contiene a e como elemento, entonces N es M o un subconjunto de M. Respecto a la correspondecia entre (M, e) y N, supongamos que el elemento e del primero corresponde al elemento f del último. Sea $N = (M_1, f)$; entonces M estará en correspondencia recíprocamente unívoca con M_1; pero M_1 es, como subconjunto de N, un subconjunto de M. Tendríamos entonces también aquí un subconjunto equivalente con M, contrario a la hipótesis.

Demostración de E. Se supone la validez del teorema hasta un cierto ν y se deducirá, como a continuación, la validez para el sucesor $\nu + 1$.

Como conjunto con número cardinal $\nu + 1$ se coloca $E_\nu = (e_0, e_1, \dots e_\nu)$; si el teorema es correcto para éste, entonces sin más (§1) se deduce su validez para cualquier otro conjunto con el mismo número cardinal $\nu + 1$. Sea E' una parte de E_ν: distinguimos los siguientes casos:

1) E' no contiene a e_ν como elemento, entonces E' es $E_{\nu-1}$ o una parte de $E_{\nu-1}$, por lo que tiene como número cardinal ν o alguno de los números $1, 2, 3, \dots \nu - 1$, porque hemos supuesto correcto nuestro teorema para el conjunto $E_{\nu-1}$ con número cardinal ν.

2) E' consiste en únicamente el elemento e_ν, entonces $\mid E' \mid = 1$.

3) E' consiste en e_ν y un conjunto E'', de tal forma que $E' = (E'', e_\nu)$. E'' es una parte de $E_{\nu-1}$, por lo que tiene, según hipótesis, como número cardinal alguno de los números $1, 2, 3, \ldots \nu - 1$.

Ahora, se cumple $\mid E' \mid = \mid E'' \mid +1$, por lo que E' tiene como número cardinal alguno de los números $2, 3, \ldots \nu$.

Demostración de A. Cada uno de los conjuntos que denotamos E_ν tiene la propiedad de que no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos. Pues si se supone que que esto se cumple para un cierto ν, se deduce del Teorema D que también se cumple para el sucesor $\nu + 1$.

Para $\nu = 1$ se reconoce de inmediato que el conjunto $E_1 = (e_0, e_1)$ no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos que en este caso son (e_0) y (e_1).

Consideremos ahora dos números μ y ν arbitrarios de la sucesión $1, 2, 3, \ldots$ donde μ aparece primero, ν es posterior, entonces $E_{\mu-1}$ es un subconjunto de $E_{\nu-1}$; por lo tanto $E_{\mu-1}$ y $E_{\nu-1}$ no son equivalentes; los números cardinales asociados $\mu = \mid E_{\mu-1} \mid$ y $\nu = \mid E_{\nu-1} \mid$ no son entonces iguales.

Demostración de B. Si de los números cardinales finitos μ y ν el primero antecede al último, entonces $\mu < \nu$. Pues si consideramos los conjuntos $M = E_{\mu-1}$ y $N = E_{\nu-1}$, entonces se satisfacen para ellos las dos condiciones en §2 para que se cumpla $\mid M \mid < \mid N \mid$. La condición 1) se cumple porque, según el teorema E, un subconjunto de $M = E_{\mu-1}$ tiene como número cardinal uno sólo de los números $1, 2, 3, \ldots \mu - 1$, por lo que no puede ser equivalente al conjunto $N = E_{\nu-1}$, según el teorema A. La condición 2) se satisface pues aquí M mismo es un subconjunto de N.

Demostración de C. Sea $\mathfrak{a}$ un número cardinal menor que $\nu + 1$. Por la condición 2) de §2 existe un subconjunto de E_ν con número cardinal $\mathfrak{a}$. Según el teorema E, para un subconjunto de E_ν aparece sólo uno de los números $1, 2, 3, \ldots \nu$ como número cardinal.

Así que $\mathfrak{a}$ es igual a uno de los números $1, 2, 3, \ldots \nu$.

De acuerdo con el teorema B ninguno de estos es mayor que ν.

Por consiguiente, no existe número cardinal $\mathfrak{a}$ que sea menor que $\nu + 1$ y mayor que ν.

Posteriormente será importante el siguiente teorema:

F. *"Si K es un conjunto de distintos números cardinales finitos, entonces entre ellos existe un $\varkappa_1$ que es menor que el resto, es decir, es el menor de todos ellos."*

Demostración. El conjunto K contiene al número 1, entonces este es el menor, $\varkappa_1 = 1$; o no lo contiene. En el último caso sea J el conjunto de *todos* aquellos números cardinales de la sucesión $1, 2, 3, \ldots$ que son menores a los que aparecen en K. Si un número ν pertenece a J, entonces también pertenece a J todos los números $< \nu$. Entonces J debe tener un elemento ν_1 tal que $\nu_1 + 1$ y por consiguiente, todos los mayores que él no pertenecen a J, pues en caso contrario J contendría la totalidad de todos los números finitos, mientras que los pertenecientes a K no están en J. El conjunto J no es otra cosa que el segmento $(1, 2, 3, \ldots \nu_1)$. El número $\nu_1 + 1 = \varkappa_1$ es necesariamente un elemento de K menor que el resto.

De F se deduce que:

G. *"Cada conjunto $K = \{\varkappa\}$ de números cardinales finitos distintos se puede representar en forma de sucesión:*

$$K = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$$

con

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \cdots\text{"}$$

§6.

El menor número cardinal transfinito álef cero

Los conjuntos con número cardinal finito se llaman *"conjuntos finitos"*, todos los demás los llamaremos *"conjuntos transfinitos"* y los números cardinales asociados a ellos *"números cardinales transfinitos"*.

La totalidad de *los números cardinales finitos* ν nos proporciona el ejemplo más cercano de un conjunto transfinito; al número cardinal asociado a él lo llamamos (§1) *"álef cero"*, en símbolos $\aleph_0$, así que establecemos

$$\aleph_0 = \mid \{\nu\} \mid . \tag{1}$$

Que $\aleph_0$ sea un número *transfinito*, es decir, que no es igual a *ningún* número *finito* μ, se sigue del hecho simple, de que si se añade un nuevo elemento e_0 al conjunto $\{\nu\}$, el conjunto unión $(\{\nu\}, e_0)$ es equivalente al que lo originó $\{\nu\}$. Porque se puede pensar una relación recíproca unívoca entre ambos, donde el elemento e_0 se asocia al elemento 1 del segundo y el elemento ν del primero al elemento $\nu + 1$ del segundo. Según §3 tenemos entonces

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0. \tag{2}$$

En §5 se demostró que (para μ finito) $\mu + 1$ siempre es distinto de μ, por lo que $\aleph_0$ no es igual a ningún número finito μ.

El número $\aleph_0$ es mayor que cualquier número finito μ:

$$\aleph_0 > \mu. \tag{3}$$

Esto se sigue, considerando §3, de que $\mu = \mid (1, 2, 3, \ldots \mu) \mid$, ningún subconjunto de $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ es equivalente al conjunto $\{\nu\}$ y $(1, 2, 3, \ldots \mu)$ es él mismo un subconjunto de $\{\nu\}$.

Por otro lado $\aleph_0$ es *el menor número cardinal transfinito*.

Si $\mathfrak{a}$ es un número cardinal transfinito distinto de $\aleph_0$, entonces se cumple

$$\aleph_0 < \mathfrak{a}. \tag{4}$$

Esto se basa en el siguiente teorema:

A. *"Todo conjunto transfinito T tiene un subconjunto con número cardinal $\aleph_0$"*.

Demostración. Si se ha eliminado, mediante algúna regla, una cantidad finita de elementos $t_1, t_2, \ldots t_{\nu-1}$ de T, siempre queda la posibilidad de eliminar otro elemento t_ν. El conjunto $\{t_\nu\}$, donde ν representa un número cardinal finito arbitrario, es un subconjunto de T con número cardinal $\aleph_0$, pues $\{t_\nu\} \sim \{\nu\}$ (§1).

B. *"Si S es un conjunto transfinito con número cardinal $\aleph_0$, S_1 es un subconjunto transfinito de S, entonces también se cumple $\mid S_1 \mid = \aleph_0$"*.

Demostración. Supongamos que $S \sim \{\nu\}$; denotemos con s_ν al elemento de S que corresponde al elemento ν del conjunto $\{\nu\}$ respecto a la correspondencia recíprocamente unívoca entre ambos conjuntos, así que

$$S = \{s_\nu\}.$$

El subconjunto S_1 de S consiste en ciertos elementos $s_\varkappa$ de S, y la totalidad de los números $\varkappa$ conforma un subconjunto transfinito K del conjunto $\{\nu\}$.

Según el teorema G, §5 el conjunto K se puede representar como la sucesión

$$K = \{\varkappa_\nu\},$$

donde

$$\varkappa_\nu < \varkappa_{\nu+1},$$

por lo que también tenemos

$$S_1 = \{s_{\varkappa_\nu}\}.$$

De lo anterior se deduce que $S_1 \sim S$, por lo que $\mid S_1 \mid = \aleph_0$.

De A y B se obtiene la fórmula (4) en vista de §2.

De (2) concluimos, mediante la adición de 1 en ambos lados, que

$$\aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0,$$

y si repetimos esta observación,

$$\aleph_0 + \nu = \aleph_0. \tag{5}$$

Pero también tenemos

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0. \tag{6}$$

Pues según (1) §3, $\aleph_0 + \aleph_0$ es el número cardinal de $\mid (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}) \mid$, porque

$$\mid \{a_\nu\} \mid = \mid \{b_\nu\} \mid = \aleph_0.$$

Ahora, es evidente que se cumple

$$\{\nu\} = (\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}),$$
$$(\{2\nu - 1\}, \{2\nu\}) \sim (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}),$$

por lo que

$$\mid (\{a_\nu\}, \{b_\nu\}) \mid = \mid \{\nu\} \mid = \aleph_0.$$

La ecuación (6) se puede escribir también como:

$$\aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0,$$

y si sumamos $\aleph_0$ repetidamente de ambos lados se encuentra que

$$\aleph_0 \cdot \nu = \nu \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{7}$$

Pero también tenemos

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0. \tag{8}$$

Demostración. Según (6) de §3, $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ es el número cardinal del conjunto enlace

$$\{(\mu, \nu)\}$$

donde μ y ν son números cardinales finitos independientes entre sí. Si también λ representa un número cardinal finito arbitrario (de tal forma que $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$ y $\{\nu\}$ son representaciones distintas de la misma totalidad de los números cardinales finitos), entonces debemos mostrar que

$$\{(\mu, \nu)\} \sim \{\lambda\}.$$

Denotemos $\mu + \nu$ con ρ, entonces ρ toma la totalidad de valores numéricos $2, 3, 4, \ldots$, y existen en total $\rho - 1$ elementos (μ, ν), para los cuales $\mu + \nu = \rho$, a saber,

$$(1, \rho - 1), (2, \rho - 2), \ldots (\rho - 1, 1).$$

En esta sucesión se piensa primero que se pone un elemento $(1, 1)$ para el cual $\rho = 2$, entonces ambos elementos para los cuales $\rho = 3$, después los tres elementos para los que $\rho = 4$, etcétera, así se obtiene la totalidad de elementos (μ, ν) en forma de una sucesión simple:

$$(1, 1); (1, 2), (2, 1); (1, 3), (2, 2), (3, 1); (1, 4), (2, 3), \ldots,$$

y de hecho, aparece en la posición λ, como se verifica fácilmente, el elemento (μ, ν), donde

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \nu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}. \tag{9}$$

λ toma cada valor numérico $1, 2, 3, \ldots$ una vez; según (9) se origina una relación unívoca recíproca entre los conjuntos $\{\lambda\}$ y $\{(\mu, \nu)\}$.

Si se multiplica ambos lados de la ecuación (8) por $\aleph_0$, se obtiene $\aleph_0^3 = \aleph_0^2 = \aleph_0$ y mediante multiplicación repetida por $\aleph_0$ logramos la ecuación, válida para cada número cardinal finito ν:

$$\aleph_0^\nu = \aleph_0. \tag{10}$$

Los teoremas E y A de §5 conducen a los teoremas sobre conjuntos *finitos*:

C. *"Todo conjunto finito E tiene la propiedad de que no es equivalente a ninguno de sus subconjuntos"*.

Este teorema se contrapone fuertemente al siguiente para conjuntos *transfinitos*:

D. *"Toda conjunto transfinito T tiene la propiedad de que contiene un subconjunto T_1 equivalente a él."*

Demostración. Según el Teorema A de este parágrafo existe un subconjunto $S = \{t_\nu\}$ de T con número cardinal $\aleph_0$. Sea $T = (S, U)$, de tal suerte que U consiste en los elementos de T distintos de los t_ν. Hacemos $S_1 = \{t_{\nu+1}\}$, $T_1 = (S_1, U)$, entonces T_1 es un subconjunto de T, de hecho se obtiene eliminando el elemento t_1 de T. Puesto que $S \sim S_1$ (teorema B de este parágrafo) y $U \sim U$, entonces también (§1) $T \sim T_1$.

En estos teoremas C y D aparece la diferencia esencial entre conjuntos finitos e infinitos en la forma más nitida, que ya fue mencionada en el año 1877 en el Volumen 84 del Journal Crelles pág. 242.

Una vez que hemos introducido el menor de los números cardinales transfinitos $\aleph_0$ y que hemos deducido sus propiedades más inmediatas, surge la pregunta sobre los números cardinales mayores y su generación a partir de $\aleph_0$.

Se debe mostrar que los números cardinales transfinitos se pueden ordenar de acuerdo a su magnitud y que con este orden, como en el caso de los finitos, conforman un *"conjunto bien ordenado"* en sentido amplio.

Después de $\aleph_0$ aparece, de acuerdo a una regla determinada, el siguiente número cardinal $\aleph_1$, después de éste aparece, según la misma regla, el siguiente más grande $\aleph_2$, y así sucesivamente.

Pero incluso la sucesión no acotada de números cardinales

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\nu, \ldots$$

no abarca a todos los números cardinales transfinitos. Se demostrará la existencia de un número cardinal, que denotaremos con $\aleph_\omega$ que se identifica como el *más inmediato mayor a todos los* $\aleph_\nu$; de él continuamos, como en el paso de $\aleph_0$ a $\aleph_1$, a uno mayor inmediato $\aleph_{\omega+1}$, y así se continua sin fin.

Para cada *número cardinal transfinito* $\mathfrak{a}$ existe un inmediato mayor, uniformemente de acuerdo a una regla; pero también para cada conjunto creciente no acotado y bien ordenado $\{\mathfrak{a}\}$ de números cardinales transfinitos $\mathfrak{a}$ existe un número cardinal inmediato mayor determinado en forma uniforme.

Para formalizar este resultado encontrado en el año 1882 y publicado en el escrito "Fundamentos de una teoría general de variedades", así como en el Volumen 21 de Mathematische Annalen nos serviremos de los así llamados "*tipos ordinales"* cuya teoría debemos detallar en los siguientes parágrafos.

§7.

El tipo ordinal de los conjuntos simplemente ordenados

Llamamos a un conjunto M *"simplemente ordenado"*, si se establece entre sus elementos m una cierta *"jerarquía"*, respecto a la cual, para cualesquiera dos elementos m_1 y m_2, uno tiene *"menor"* y el otro tiene *"mayor"* jerarquía y de tal forma que para cualesquiera tres elementos m_1, m_2 y m_3, si digamos m_1 tiene menor jerarquía que m_2 y éste menor que m_3, entonces siempre se cumple que m_1 tiene menor jerarquía que m_3.

La relación entre dos elementos m_1 y m_2, respecto a la cual m_1 tiene la menor, m_2 la mayor jerarquía, se expresa mediante las fórmulas

$$m_1 \prec m_2, \qquad m_2 \succ m_1. \tag{1}$$

Así por ejemplo, en una recta infinita cada conjunto definido de puntos P es un conjunto simplemente ordenado, si a cada dos puntos arbitrarios p_1 y p_2 se le otorga menor jerarquía a aquel, cuya coordenada (fijando un origen y una dirección positiva) sea la menor.

Es evidente que un conjunto se puede "ordenar simplemente" en muy distintas maneras. Consideremos como ejemplo el conjunto R de todos los números racionales positivos $\frac{p}{q}$ (donde p y q son primos relativos), mayores que cero pero menores que 1, entonces se tiene una jerarquía "natural" de acuerdo a su magnitud. Pero también se pueden ordenar (y con este nuevo orden denotaremos al conjunto con R_0) de tal forma que dos números $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$, para los cuales las sumas $p_1 + q_1$ y $p_2 + q_2$ toman valores diferentes, el número que obtiene el menor rango jerárquico es aquel para el cual la suma respectiva es la menor, y que cuando $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, entonces el menor es, el menor de ambos racionales.

Puesto un valor de $p + q$ corresponde a solamente una cantidad finita de números racionales distintos $\frac{p}{q}$, en esta jerarquía nuestro conjunto tiene claramente la forma:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

donde

$$r_\nu \prec r_{\nu+1}.$$

Siempre que hablemos de un conjunto M *ordenado simplemente*, pensaremos que subsiste una *jerarquía bien determinada* en el sentido recién definido entre sus elementos.

Existen conjuntos 2-, 3-, ν, α-ordenados, pero de éstos prescindiremos por el momento en nuestra investigación. Por ello utilizamos la abreviación "conjunto ordenado", pensando en realidad en un "conjunto simplemente ordenado".

A cada conjunto ordenado M se le asocia un *"tipo ordinal"* determinado o, en forma abreviada, un determinado *"tipo"*, que denotamos como

$$\overline{M}; \tag{2}$$

ésta es la *noción general, que se obtiene de M, prescindiendo de la naturaleza de los elementos m, pero considerando la jerarquía entre ellos.*

Más aún, el tipo ordinal $\overline{M}$ es *él mismo un conjunto ordenado*, cuyos elementos son *unidades*, que adquieren la misma jerarquía que sus correspondientes elementos en M, de los cuales se obtuvieron mediante abstracción.

Dos conjuntos ordenados M y N son *"similares"*, cuando se pueden poner en correspondencia recíproca unívoca y dados dos elementos m_1, m_2 de M y sus correspondientes elementos n_1, n_2 en N, la relación jerárquica entre m_1 y m_2 en M es la misma que entre n_1 y n_2 en N. A tal correspondencia entre conjuntos similares la llamamos un "aplicación" entre ellos. Así corresponde cada subconjunto M_1 de M (que es claramente también un conjunto ordenado) a un subconjunto similar N_1 de N.

La similitud de dos conjuntos ordenados M y N la expresamos mediante la fórmula:

$$M \simeq N. \tag{3}$$

Cada conjunto ordenado es similar a sí mismo.

Si dos conjuntos ordenados son similares a un tercero, son similares entre sí.

Mediante una sencilla reflexión concluimos que *dos conjuntos ordenados tienen el mismo tipo ordinal cuando y sólo cuando son similares, de tal forma que las fórmulas*

$$\overline{M} = \overline{N}, \quad M \simeq N \tag{4}$$

son consecuencia una de la otra.

Si se abstrae en un tipo ordinal $\overline{M}$ también de la jerarquía entre sus elementos, entonces se concluye que (§1) el número cardinal $\mid M \mid$ del conjunto ordenado M es igual al número cardinal del tipo ordinal $\overline{M}$.

De $\overline{M} = \overline{N}$ siempre se deduce que $\mid M \mid = \mid N \mid$, es decir, los conjuntos ordenados del mismo tipo siempre tienen la misma cardinalidad; la similitud entre conjuntos ordenados siempre da lugar a su equivalencia. Por el contrario, dos conjuntos ordenados pueden ser equivalentes, sin ser similares.

Para denotar los tipos ordinales recurrimos a las letras minúsculas del alfabeto griego.

Si α es un tipo ordinal, entonces entenderemos por

$$\overline{\alpha} \tag{5}$$

el número cardinal asociado.

Los tipos ordinales de conjuntos finitos simplemente ordenados no ofrecen ningún interés especial. Pues es fácil comprobar, que para un número cardinal finito ν todos los conjuntos simplemente ordenados de esa cardinalidad son similares entre sí, así que tienen el mismo tipo. Los tipos ordinales finitos simples se generan por las mismas reglas que los números cardinales finitos, y se permite usar los mismos símbolos $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$, aunque la noción sea distinta a la de número cardinal.

Muy distinto es el comportamiento de los *tipos ordinales transfinitos*; pues para un mismo número cardinal transfinito existe una cantidad infinita de tipos distintos de conjuntos simplemente ordenados de esa cardinalidad, que al reunirlos constituyen una *"clase de tipos"* particular.

Cada una de estas clases de tipos está determinada entonces por un número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$, que es común a cada uno de los tipos pertenecientes a la clase; por ello abreviamos y la llamamos clase tipo $[\mathfrak{a}]$.

La primera de ellas, que se nos presenta en forma natural y cuyo análisis completo será la siguiente meta de la teoría de conjuntos transfinitos, es la clase tipo $[\aleph_0]$, que comprende todos los tipos con el menor número cardinal transfinito $\aleph_0$.

Debemos distinguir entre el número cardinal $\mathfrak{a}$, que determina a la clases tipo $[\mathfrak{a}]$ y el número cardinal $\mathfrak{a}'$, que está *determinado a su vez por la clase tipo* $[\mathfrak{a}]$; él es el número cardinal que (§1) surge de la clase tipo $[\mathfrak{a}]$, en tanto que ésta represente un conjunto *bien definido*, *cuyos elementos son los tipos* α *con número cardinal* $\mathfrak{a}$. Después veremos que $\mathfrak{a}'$ es distinta de $\mathfrak{a}$ y de hecho, siempre es mayor que $\mathfrak{a}$.

Si invertimos la jerarquía entre los elementos de un conjunto ordenado M, de tal forma que en todas partes remplazamos un "menor" por un "mayor" y cada "mayor" por un "menor", obtenemos otra vez un conjunto ordenado que denotamos con:

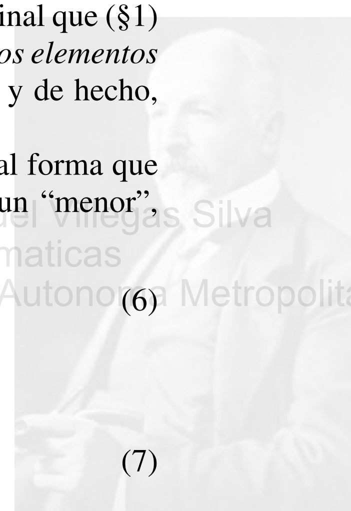
$$^{*}M \tag{6}$$

y lo llamamos el *"inverso"* de M.

El tipo ordinal de $^{*}M$ lo denotamos, cuando $\alpha = \overline{M}$, como

$$^{*}\alpha \tag{7}$$

Puede ocurrir que $^{*}\alpha = \alpha$, como por ejemplo en los tipos ordinales finitos o con el tipo del conjunto R de todos los números racionales, que son mayores que 0 y menores que 1, con su jerarquía natural, y que estudiaremos con la notación η.



Notamos además que dos conjuntos ordenados similares se pueden aplicar entre sí ya sea en una *sola* forma o en *varias* formas; en el primer caso el tipo asociado es similar a sí mismo en una sola forma, en el otro caso en varias formas.

Entonces no sólo los tipos finitos, sino también los tipos de “conjuntos bien ordenados” transfinitos, que nos ocuparán después y que llamaremos “números ordinales transfinitos”, son del tipo que permiten una sola aplicación sobre sí mismos. Por el contrario, el tipo η es similar a sí mismo en una cantidad inumerable de formas.

Queremos aclarar esta diferencia con dos ejemplos sencillos.

Por ω entendemos el tipo de un conjunto bien ordenado

$$(e_1, e_2, \dots, e_\nu, \dots),$$

en el que

$$e_\nu \prec e_{\nu+1}$$

y donde ν recorre todos los números cardinales finitos.

Otro conjunto bien ordenado

$$(f_1, f_2, \dots, f_\nu, \dots)$$

con la condición

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}$$

con tipo ω puede ser “aplicado” sobre el primero sólo cuando e_ν y f_ν se corresponden. Pues para respetar jerarquías el primer elemento e_1 debe corresponder a f_1 respecto a la aplicación, el segundo e_2 que jerárquicamente sigue a e_1 debe corresponder a f_2 que es el sucesor de f_1, etcétera.

Cualquier otra correspondencia unívoca recíproca entre ambos conjuntos equivalentes $\{e_\nu\}$ y $\{f_\nu\}$ no es una “aplicación”, en el sentido que hemos definido antes para la teoría de tipos.

Tomemos, por otro lado, un conjunto ordenado de la forma

$$\{e_{\nu'}\},$$

donde ν' recorre todos los números enteros positivos y negativos con excepción del cero y donde se cumple

$$e_{\nu'} \prec e_{\nu'+1}.$$

Este conjunto no tiene, jerárquicamente, menor ni mayor elemento. Su tipo es, según la definición de suma dada en §8,

$$^*\omega + \omega.$$

Él es similar a sí mismo en una cantidad infinita de formas.

Pues consideremos un conjunto del mismo tipo

$$\{f_{\nu'}\},$$

donde

$$f_{\nu'} \prec f_{\nu'+1},$$

entonces se pueden corresponder ambos conjuntos de tal forma que, si ν'_0 es uno de los números ν', al elemento $e_{\nu'}$ del primer conjunto le corresponde el elemento $f_{\nu'_0+\nu'}$ del segundo. De la arbitrariedad de ν'_0 se sigue que existen una cantidad infinita de tales transformaciones.

La noción recién desarrollada de “tipo ordinal” comprende, cuando se traslada en forma similar a conjuntos ordenados de orden superior, junto con la noción introducida en §1 de número “cardinal o cardinalidad”, todo lo “enumerable” que sea imaginable y, en este sentido, no permite mayores generalizaciones. No es arbitraria, sino que es la generalización natural de la noción de contar. *Es importante resaltar, que el criterio de igualdad (4) se sigue necesariamente de la noción de tipo ordinal, por lo que no permite ninguna enmienda.* El menosprecio de esta situación es la causa principal de graves errores, que se encuentran en la obra del Sr. Veronese “Grundzüge der Geometrie” (traducida al alemán por A. Schepp, Leipzig 1894).

En la pág. 30 se define la "cantidad o número de un grupo ordenado" totalmente en coincidencia con lo que nosotros hemos llamado el "tipo ordinal de un conjunto simplemente ordenado". (Zur Lehre von Transfiniten, Halle 1890, págs. 68-75, Reproducción del Zeitschrifft f. Philos. u. philos. Kritik, del año 1887).

Al criterio de igualdad el Sr. V. considera que debe añadirle un suplemento. El dice en la pág. 31: "Números, cuyas unidades se corresponden unívocamente y en el mismo orden y *ninguno de los cuales es igual a una parte del otro, son iguales"*[3].

Esta definición de igualdad da lugar a un *círculo vicioso*, por lo que conduce a un *absurdo*.

¿Qué quiere decir en el suplemento "*no ser igual a una parte del otro"*?

Para responder a esta pregunta, se debe saber de antemano cuándo dos números son o no iguales. *Así que su definición de igualdad* (sin tener en cuenta su arbitrariedad) *presupone una definición de igualdad que a su vez presupone una definición de igualdad, para la cual se debe saber de antemano que es igual y distinto, etcétera, etcétera hasta el infinito.*

Una vez que el Sr. V. ha *dado libremente* en tal forma el nada superfluo fundamento para la comparación de números, no debe sorprender la falta de formalidad en la que él a continuación opera con sus números seudotransfinitos y les atribuye a estos últimos propiedades que por razones simples no pueden poseer, porque ellos, no pueden existir (exceptuando en el papel), en la forma que él pretende. También con esto se explica la similitud que tiene su construcción de los números con el trabajo realmente absurdo"undendliche Zahlen" de Fontenelle que se presenta en su "Gèometrie de L'Infini", Paris, 1727.

Hace poco el Sr. W. Killing ha expresado, por suerte, sus objeciones contra los fundamentos del Libro de Veronese en el "Index lectionum" de la Academia en Münster. (1895-1896).

§8.
Suma y multiplicación de tipos ordinales

El conjunto unión (M, N) de dos conjuntos M y N se puede ver como un conjunto ordenado cuando ambos son ordenados, dejando la jerarquía entre elementos de M igual, lo mismo que la jerarquía entre los elementos de N, y estableciendo que los elementos de M tienen menor jerarquía que los de N. Si M' y N' son otros dos conjuntos ordenados, $M \simeq M'$, $N \simeq N'$, entonces también se cumple $(M, N) \simeq (M', N')$; el tipo ordinal de (M, N) depende entonces tan sólo de los tipos ordinales $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$; así, definimos

$$\alpha + \beta = \overline{[(M, N)]}. \tag{1}$$

En la suma $\alpha + \beta$, α se llama el *"augendus"*, mientras que β el *"addendus"*.

Para tres tipos ordinarios arbitrarios se demuestra fácilmente la ley asociativa

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma. \tag{2}$$

Por el contrario, la ley conmutativa no se cumple en general respecto a la adición de tipos. Esto se observa en el siguiente ejemplo sencillo:

Si ω es el tipo, ya mencionado en §7, del conjunto bien ordenado

$$E = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots), \quad e_\nu \prec e_{\nu+1},$$

entonces $1 + \omega$ no es igual a $\omega + 1$.

[3]La edición original en italiano (pág. 27) dice literalmente:"Numeri le unità dei quali si corrispondono univocamente e nel medesimo ordine, e di cui l'uno non è parte o uguale ad una parte dell' altro, sono uguali."

Pues si f es un elemento nuevo, se tiene según (1)

$$1 + \omega = \overline{(f, E)},$$
$$\omega + 1 = \overline{(E, f)}.$$

El conjunto

$$(f, E) = (f, e_1, e_2, \dots, e_\nu, \dots)$$

es similar al conjunto E, por consiguiente

$$1 + \omega = \omega.$$

Por el contrario, los conjuntos E y (E, f) no son similares, pues el primero no tiene mayor elemento, respecto a su jerarquía, mientras que el último conjunto tiene al elemento f como el mayor. Por lo tanto, $\omega + 1$ es distinto de $\omega = 1 + \omega$.

A partir de dos conjuntos ordenados M y N con tipos α y β se puede formar un conjunto ordenado S haciendo que en N cada elemento n sea sustituido por un conjunto ordenado M_n con el mismo tipo α que M, por lo que

$$\overline{M}_n = \alpha, \tag{3}$$

y la jerarquía en

$$S = \{M_n\} \tag{4}$$

se determina de acuerdo a:

1) dos elementos de S, que pertenezcan al mismo conjunto M_n, conservan en S la jerarquía que tenian en M_n,

2) dos elementos de S que pertenezcan a dos conjuntos M_{n_1} y M_{n_2} distintos, obtienen en S la jerarquía que n_1 y n_2 tenian en N.

El tipo ordinal de S depende, como se verifica fácilmente, sólo de los tipos α y β; definimos:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{S}. \tag{5}$$

En este producto, α se llama el *“multiplicandus”* y β el *“multiplicator”*

Después de fijar alguna *aplicación* de M sobre M_n sea m_n el elemento de M_n correspondiente al elemento m de M.

Podemos entonces escribir también

$$S = \{m_n\}. \tag{6}$$

Consideremos un tercer conjunto ordenado $P = \{p\}$ con tipo ordinal $\overline{P} = \gamma$, entonces según (5)

$$\alpha \cdot \beta = \overline{\{m_n\}}, \quad \beta \cdot \gamma = \overline{\{n_p\}}, \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \overline{\{(m_n)_p\}},$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \overline{\{m_{(n_p)}\}}.$$

Ambos conjuntos ordenados $\{(m_n)_p\}$ y $\{m_{(n_p)}\}$ son similares y se aplican uno en el otro, si asociamos sus elementos $(m_n)_p$ y $m_{(n_p)}$.

Se cumple entonces la *ley asociativa* para tres tipos α, β, γ

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{7}$$

De (1) y (5) se sigue también fácilmente la *ley distributiva*

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, \tag{8}$$

pero sólo en esta forma, donde *el factor con dos elementos desempeña el papel del multiplicator*.

Por el contrario, entre tipos *la ley conmutativa* tiene tan poca validez en la multiplicaión que como en la adición.

Dr. Luis Miguel Villegas Silva
Depto. Matematicas
Universidad Autonoma Metropolitana I
Mexico

Por ejemplo, $2 \cdot \omega$ y $\omega \cdot 2$ son tipos distintos; pues por (5)

$$2 \cdot \omega = \overline{(e_1, f_1; e_2, f_2; \ldots; e_\nu, f_\nu; \ldots)} = \omega;$$

mientras que

$$\omega \cdot 2 = \overline{(e_1, e_2, \ldots, e_\nu, \ldots; f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots)},$$

que es claraemnte distinto de ω.

Si se comparan las definiciones dadas en §3 para las operaciones elementales entre números cardinales con las aquí presentadas para tipos ordinales, se reconoce fácilmente que el número cardinal de la suma de dos tipos ordinales es igual a la suma de los números cardinales de cada tipo y que el número cardinal del producto de dos tipos es igual al producto de los números cardinales de cada tipo.

Cada ecuación entre tipos ordinales que involucre operaciones elementales sigue siendo válida, si se sustituyen todos los tipos por sus números cardinales.

§9.

El tipo ordinal η del conjunto R de los números racionales mayores que cero y menores que 1 con su orden natural.

Por R entendemos, como en §7, el sistema de los números racionales $\frac{p}{q}$ (suponiendo p y q sin factores en común), > 0 y < 1, *con su orden natural*, donde la magnitud del número determina su jerarquía. El tipo ordinal de R lo denotamos con η:

$$\eta = \overline{R}. \tag{1}$$

Allí consideramos el mismo conjunto con otro orden, en el que lo llamamos R_0 y en primer lugar se toma en cuenta la magnitud de $p + q$, en segundo lugar, para números racionales, para los cuales $p + q$ tiene el mismo valor, la jerarquía la determina la magnitud de $\frac{p}{q}$. R_0 tiene la forma de un conjunto bien ordenado de tipo ω:

$$R_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu, \ldots), \quad \text{donde } r_\nu < r_{\nu+1}, \tag{2}$$

$$\overline{R}_0 = \omega. \tag{3}$$

R y R_0 tienen el mismo número cardinal, pues sólo se distinguen por la jerarquía entre sus elementos, y como es evidente que $\mid R_0 \mid = \aleph_0$, entonces también se cumple

$$\mid R \mid = \overline{\overline{\eta}} = \aleph_0. \tag{4}$$

Por lo tanto, el tipo η pertenece a la clase de tipo $[\aleph_0]$.

Seguidamente hacemos notar que en R no existen, relativos a su orden, un mayor o un menor elemento.

En tercer lugar, R tiene la propiedad de que *entre* cualesquiera dos de sus elementos según su orden, se encuentra otro; esta característica la expresamos con las siguientes palabras: R es *"denso en todas partes"*.

Ahora se debe mostrar que estas tres propiedades caracterizan al tipo η de R, por lo que se cumple el siguiente teorema:

"Si se tiene un conjunto simplemente ordenado M que satisface las tres condiciones:

1) $\mid M \mid = \aleph_0$,
2) M no tiene, de acuerdo a su orden, un menor o un mayor elemento,
3) M es denso en todas partes,

entonces el tipo ordinal de M es igual a η:

$$\overline{M} = \eta.\text{”}$$

Demostración. Por la condición 1) se puede hacer de M un conjunto bien ordenado con tipo ω; una vez que se ha hecho esto, denotemos M con M_0 y hacemos

$$M_0 = (m_1, m_2, \ldots , m_\nu, \ldots) \tag{5}$$

Ahora debemos mostrar que

$$M \simeq R. \tag{6}$$

Es decir, se debe demostrar que se puede *aplicar* M sobre R de tal forma que la jerarquía entre dos elementos en M es la misma que entre los correspondientes elementos en R.

Supongamos que el elemento r_1 en R corresponde al elemento m_1 en M.

r_2 guarda una determinada jerarquía respecto a r_1 en R; por la condición 2) existen una cantidad infinita de elementos m_ν de M que guardan la misma jerarquía respecto a m_1 en M que r_2 respecto a r_1 en R; de *entre ellos* escogemos aquel que en en M_0 tenga el índice menor, digamos m_{ι_2}, y asociémoslo con r_2.

r_3 tiene en R una determinada relación de orden con r_1 y r_2; según las condiciones 2) y 3) existe una cantidad infinita de elementos m_ν en M que guardan la misma relación de orden con m_1 y m_{ι_2} que la que guardan r_3 con r_1 y r_2 en R; escogemos aquel que tenga el menor índice en M_0, digamos m_{ι_3}, y lo asociamos con r_3.

Continuamos este proceso según estas prescripciones; si a los ν elementos de R

$$r_1, r_2, r_3, \ldots , r_\nu$$

se les ha asociado los elementos

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots , m_{\iota_\nu}$$

de M, que en M guardan la misma relación de orden entre sí que sus correspondientes en R, entonces el elemento $r_{\nu+1}$ de R se asocia con el elemento con el menor índice $m_{\nu+1}$ de M, que tenga la misma relación jerárquica respecto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots , m_{\iota_\nu}$$

en M que la que tiene $r_{\nu+1}$ con $r_1, r_2, \ldots , r_\nu$ en R.

En esta forma hemos asociado *todos* los elementos r_ν de R con elementos m_{ι_ν} de M, y los elementos m_{ι_ν} tienen en M la misma relación de orden que sus correspondientes elementos r_ν en R.

Aún se debe mostrar que los elementos m_{ι_ν} comprenden a *todos los elementos* m_ν de M o, lo que es lo mismo, que la sucesión

$$1, \iota_2, \iota_3, \ldots , \iota_\nu, \ldots$$

es simplemente una permutación de la sucesión

$$1, 2, 3, \ldots , \nu, \ldots$$

La demostración se efectua mediante *inducción completa*, mostrando que *si* los elementos $m_1, m_2, \ldots , m_\nu$ aparecen en la permutación, *también aparece el elemento siguiente* $m_{\nu+1}$.

Sea λ suficientemente grande para que entre los elementos

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \ldots , m_{\iota_\lambda}$$

aparezcan los elementos

$$m_1, m_2, \ldots , m_\nu.$$

(que por hipótesis aparecen en la permutación). Puede ocurrir que entre ellos se encuentre $m_{\nu+1}$; entonces aparece $m_{\nu+1}$ en la aplicación.

Dr. Luis Miguel Villegas Silva
Depto. Matematicas
Universidad Autonoma Metropolitana I
Mexico

Si en cambio, *no* aparece $m_{\nu+1}$ entre los elementos

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \dots, m_{\iota_\lambda},$$

entonces $m_{\nu+1}$ guarda una determinada relación jerárquica en M respecto estos elementos; la misma relación se presenta entre una cantidad infinita de elementos en R con $r_1, r_2, \dots, r_\lambda$, y entre ellos sea $r_{\lambda+\sigma}$ el que tiene el menor índice en R_0.

Entonces, como se verifica fácilmente, $m_{\nu+1}$ tiene la misma jerarquía respecto a

$$m_1, m_{\iota_2}, m_{\iota_3}, \dots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}$$

en M que $r_{\lambda+\sigma}$ respecto a

$$r_1, r_2, \dots, r_{\lambda+\sigma-1}$$

en R. Puesto que los $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ ya pertenecen a la transformación, $m_{\nu+1}$ es el elemento con el menor índice en M_0 que tiene esa relación jerárquica respecto a

$$m_1, m_2, \dots, m_{\iota_{\lambda+\sigma-1}}.$$

Por consiguiente, según la forma en que establecimos la correspondencia

$$m_{\iota_{\lambda+\sigma}} = m_{\nu+1}.$$

También en este caso aparece el elemento $m_{\nu+1}$ en la aplicación, y de hecho es $r_{\lambda+\sigma}$ el elemento que se le asocia en R.

Así hemos visto que nuestra aplicación transforma *todo el conjunto* M en *todo el conjunto* R; M y R son conjuntos similares,
l.q.q.d.

Del Teorema recién demostrado se obtiene, por ejemplo, lo siguiente:

"η es el tipo ordinal del conjunto de los números racionales positivos y negativos excluyendo al cero en su orden natural".

"η es el tipo ordinal del conjunto de los números racionales mayores que a y menores que b con su orden natural, donde a y b son cualesquiera números reales con $a < b$."

"η es el tipo ordinal del conjunto de los números reales algebraicos con su orden natural."

"η es el tipo ordinal del conjunto de los números reales algebraicos mayores que a y menores que b con su orden natural, donde a y b son cualesquiera números reales con $a < b$."

Ya que todos estos conjuntos ordenados satisfacen las tres condiciones para M de nuestro teorema (compárese con pág. 258, Crelle Journal Vol. 77).

Si consideremos además las definiciones dadas en §8 de los conjuntos con tipos $\eta + \eta$, $\eta\eta$, $(1+\eta)\eta$, $(\eta+1)\eta$, $(1+\eta+1)\eta$, encontramos que ellos satisfacen las tres condiciones. Con ello tenemos los teoremas:

$$\eta + \eta = \eta, \tag{7}$$

$$\eta\eta = \eta, \tag{8}$$

$$(1+\eta)\eta = \eta, \tag{9}$$

$$(\eta+1)\eta = \eta, \tag{10}$$

$$(1+\eta+1)\eta = \eta. \tag{11}$$

Repetidas aplicaciones de (7) y (8) propician para cada número finito ν

$$\eta \cdot \nu = \eta, \tag{12}$$

y

$$\eta^{\nu} = \eta. \tag{13}$$

Por el contrario, como se verifica sin dificultad, para $\nu > 1$, los tipos $1+\eta$, $\eta+1$, $\nu\cdot\eta$, $1+\eta+1$ son distintos entre sí y distintos de η. Por otro lado,

$$\eta + 1 + \eta = \eta, \tag{14}$$

mientras que $\eta + \nu + \eta$ es distinto de η, para $\nu > 1$.

Finalmente, vale la pena mencionar que

$$^{*}\eta = \eta. \tag{15}$$

§10.

Las sucesiones fundamentales contenidas en un conjunto bien ordenado.

Fijemos un conjunto simplemente ordenado M arbitrario. Cada subconjunto de M es en sí mismo un conjunto ordenado. Para el estudio del tipo $\overline{M}$ resultan ser muy importantes los subconjuntos de M que tienen tipo ω o $^{*}\omega$; los llamamos *"sucesiones fundamentales de primer orden contenidas en M"*, más aún, a los primeras (las de tipo ω) las llamamos *"crecientes"*, y a las otras (las de tipo $^{*}\omega$), *"decrecientes"*.

Puesto que nos restringiremos a las sucesiones fundamentales de *primer orden* (en trabajos futuros consideraremos también sucesiones de *orden superior*), las llamaremos simplemente *"sucesiones fundamentales"*.

Una "sucesión fundamental creciente" tiene la forma

$$\{a_\nu\}, \quad \text{donde}, \quad a_\nu \prec a_{\nu+1}, \tag{1}$$

una "sucesión fundamental decreciente" tiene la forma

$$\{b_\nu\}, \quad \text{donde}, \quad b_\nu \succ b_{\nu+1}. \tag{2}$$

ν tiene siempre el significado, en nuestras consideraciones (lo mismo que $\varkappa$, λ, μ), de un número cardinal *finito* arbitrario o también de un tipo *finito* respectivamente un número ordinal *finito*.

Dos sucesiones fundamentales crecientes $\{a_\nu\}$ y $\{a'_\nu\}$ contenidas en M se dicen *"correspondientes"*, en símbolos

$$\{a_\nu\} \parallel \{a'_\nu\}, \tag{3}$$

cuando para cada elemento a_ν existe un elemento a'_λ tal que

$$a_\nu \prec a'_\lambda,$$

y para cada elemento a'_ν existe un elemento a_μ tal que

$$a'_\nu \prec a_\mu.$$

Dos sucesiones fundamentales decrecientes $\{b_\nu\}$ y $\{b'_\nu\}$ en M se dicen *"correspondientes"*, en símbolos

$$\{b_\nu\} \parallel \{b'_\nu\}, \tag{4}$$

cuando para cada elemento b_ν existe un elemento b'_λ tal que

$$b_\nu \succ b'_\lambda,$$

y para cada elemento b'_ν existe un elemento b_μ tal que

$$b'_\nu \succ b_\mu.$$

Una sucesión fundamental creciente $\{a_\nu\}$ y una decreciente $\{b_\nu\}$ se llaman *"correspondientes"*, en símbolos

$$\{a_\nu\} \parallel \{b_\nu\}, \tag{5}$$

si 1) para cualesquiera ν y μ

$$a_\nu \prec b_\mu$$

y 2) existe en M *a lo sumo un elemento* m_0 (es decir, solamente uno o ninguno) tal que para toda ν

$$a_\nu \prec m_0 \prec b_\nu.$$

Se cumplen entonces los tres teoremas:

A. *"Si dos sucesiones fundamentales son correspondientes a una tercera, entonces ellas son correspondientes entre sí".*

B.*"Dos sucesiones fundamentales ambas crecientes o ambas decrecientes, una de las cuales es un subconjunto de la otra, son correspondientes."*

Si existe en M un elemento m_0 que tiene una posición, respecto a la sucesión fundamental creciente, tal que

1) para cada ν

$$a_\nu \prec m_0,$$

2) para cada elemento m de M que sea $\prec m_0$, existe un cierto número ν_0 tal que

$$a_\nu \succ m, \quad \text{para} \quad \nu \geq \nu_0,$$

llamaremos a m_0 *"un elemento límite de* $\{a_\nu\}$ *en M"* o también un *"elemento principal de M"*.

Igualmente, llamaremos a un elemento m_0 un *"elemento principal de M"* o también *"un elemento límite de* $\{b_\nu\}$ *en M"* si se satisfacen las condiciones:

1) para cada ν

$$b_\nu \succ m_0,$$

2) para cada elemento $m \succ m_0$ de M existe un cierto número ν_0 tal que

$$b_\nu \prec m, \quad \text{para} \quad \nu \geq \nu_0.$$

Una sucesión fundamental *nunca puede tener más* de un elemento límite en M; M tiene en general muchos elementos principales.

Se verifica la validez de los siguientes teoremas:

C. *"Si una sucesión fundamental tiene un elemento límite en M, entonces todas las sucesiones correspondientes con ella tienen el mismo elemento límite en M."*

D. *"Si dos sucesiones fundamentales (ambas crecientes o decrecientes o ninguna) tienen el mismo elemento límite en M, entonces son correspondientes."*

Si M y M' son dos conjuntos ordenados similares, es decir,

$$\overline{M} = \overline{M'} \tag{6}$$

y se fija *algúna aplicación* entre ellos, entonces se cumplen, como se ve con facilidad, los siguientes teoremas:

E. *"A cada sucesión fundamental en M le corresponde como imagen una sucesión fundamental en M′ y viceversa; a cada sucesión creciente, a cada decreciente y a sucesiones fundamentales correspondientes, tienen como imagen una sucesión creciente, decreciente o sucesiones fundamentales correspondientes en M′, respectivamente, y viceversa".*

F. *"Si un elemento límite en M pertenece a una sucesión fundamental, entonces pertenece a la sucesión fundamental imagen en M′ un elemento límite y viceversa; estos elementos límite son imagen uno del otro respecto a la aplicación".*

G. *"A los elementos principales de M corresponden como imágenes elementos principales en M′ y viceversa."*

Si un conjunto M consiste en elementos principales, es decir, cada uno de sus elementos es un elemento principal, lo llamamos un *"conjunto denso en sí mismo"*.

Si para cada sucesión fundamental en M existe un elemento límite en M, entonces a M lo llamamos un *"conjunto cerrado"*.

Un conjunto que es "denso en sí mismo" y "cerrado" se conoce como *"conjunto perfecto"*.

Si un conjunto posee alguna de estas tres propiedades, también la tiene cada conjunto similar a él; por lo cual se pueden transferir estas propiedades a tipos ordinales, por lo que existen *"tipos densos en sí mismos", "tipos cerrados", "tipos perfectos"* y *" tipos densos en todas partes"* (§9).

Por ejemplo, η es un tipo "denso en sí mismo"; como en §9 se mostró, es "denso en todas partes", pero no "cerrado".

ω y ${}^*\omega$ no tienen elementos principales (unidades principales); por el contrario, $\omega+\nu$ y $\nu+{}^*\omega$ tienen un elemento principal y son tipos "cerrados".

El tipo $\omega \cdot 3$ tiene dos elementos principales, pero no es "cerrado"; el tipo $\omega \cdot 3 + \nu$ tiene tres elementos principales y es "cerrado".

§11.

El tipo ordinal θ del continuo lineal X.

Tornamos a investigar el tipo ordinal del conjunto $X = \{x\}$ de los números reales x, ≥ 0 y ≤ 1, con su orden natural, tal que para cualesquiera dos elementos arbitrarios x y x' ocurre

$$x \prec x', \quad \text{cuando} \quad x < x'. \tag{1}$$

La notación para este tipo es

$$\overline{X} = \theta. \tag{1}$$

De la teoría de los números racionales e irracionales se sabe que cada sucesión fundamental $\{x_\nu\}$ en X tiene un elemento límite x_0 en X y recíprocamente, cada elemento x de X es un elemento límite de sucesiones fundamentales correspondientes en X. Por ello X es un *"conjunto perfecto"*, y θ un *"tipo perfecto"*.

Con lo anterior no queda θ totalmente caracterizado, debemos considerar también la siguiente propiedad de X:

X contiene al conjunto R estudiado en §9 de tipo ordinal η como subconjunto, y de hecho, *de tal forma que entre cualesquiera dos elementos arbitrarios* x_0 y x_1 de X, de acuerdo al orden, está un elemento de R.

Ahora se debe mostrar *que estas características juntas* determinan por completo al tipo ordinal θ del continuo lineal X, de tal forma que se cumpla el teorema:

"Si un conjunto ordenado M cumple con: 1) es "perfecto", 2) contiene un conjunto S de cardinalidad $\mid S \mid = \aleph_0$ que guarda una relación con M tal que entre cualesquiera dos elementos arbitrarios m_0 y m_1 de M existe un elemento de S entre ellos, según su orden, entonces $\overline{M} = \theta$.

Demostración. Si S tiene un menor o un mayor elemento, entonces por 2) éste debe comportarse igual en M; por lo tanto, podemos eliminar este elemento de S sin que este conjunto pierda su relación expresada por 2) con M.

Suponemos en consecuencia que S no tiene menor o mayor elemento; por consiguiente, según §9, S tiene tipo ordinal η.

Pues si S es un subconjunto de M, entonces por 2) entre cualesquiera dos elementos s_0 y s_1 de S debe estar otro elemento de S respecto a su orden. Además, por 2) tenemos que $\mid S \mid = \aleph_0$.

Ambos conjuntos son por consiguiente *“similares”* entre sí,

$$S \simeq R. \tag{2}$$

Fijemos una *“aplicación”* entre R y S y afirmamos que ésta genera una cierta *“aplicación”* entre X y M, y de hecho de la siguiente forma:

Todos los elementos de X, que simultáneamente pertenecen a R, son imágenes de elementos correspondientes en M, que son simultáneamente elementos de S y corresponden a esos elementos de R respecto a la aplicación de R sobre S.

Si x_0 es un elemento de X que no pertenece a R, se puede ver como el límite de una sucesión fundamental $\{x_\nu\}$ contenida en X que se puede remplazar por una sucesión fundamental correspondiente $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ contenida en R. A esta última corresponde como imagen una sucesión fundamental $\{s_{\lambda_\nu}\}$ en S y M, que por 1) está acotada por un elemento m_0 en M que no pertenece a S (F, §10). Este elemento m_0 en M (que sigue siendo el mismo, si en lugar de las sucesiones fundamentales $\{x_\nu\}$ y $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ se utilizan otras que tengan como elemento límite al mismo elemento x_0 (E, C, D, en §10), es la imagen de x_0 en X. Recíprocamente, a cada elemento m_0 de M, que no aparece en S, le corresponde un elemento determinado x_0 de X que no pertenece a R y que es la imagen de m_0.

De esta forma se establece una correspondencia recíproca unívoca entre X y M, para la que se debe mostrar que da origen a una “aplicación” entre estos conjuntos.

Esto se cumple desde el principio para aquellos elementos de X y M que simultáneamente pertenecen a R, respectivamente a S.

Comparemos un elemento r de R con un x_0 de X que no pertenezca a R; sean s y m los elementos correspondientes de M.

Si $r < x_0$, existe una sucesión fundamental creciente $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ acotada por x_0, y a partir de un cierto ν_0 se cumple que

$$r < r_{\varkappa_\nu} \quad \text{para} \quad \nu \geq \nu_0.$$

La imagen de $\{r_{\varkappa_\nu}\}$ en M es una sucesión fundamental creciente $\{s_{\lambda_\nu}\}$ acotada por m_0 en M, y se tiene (§10), primero, que $s_{\lambda_\nu} \prec m_0$ para toda ν y por otro lado, que $s \prec s_{\lambda_\nu}$ para $\nu \geq \nu_0$, por lo que (§7) $s \prec m_0$.

Si $r > x_0$, se deduce en forma similar que $s \succ m_0$.

Consideremos finalmente dos elementos x_0 y x_0' que no pertenezcan a R y sus correpondientes elementos m_0 y m_0' en M, entonces se demuestra en forma análoga que de $x_0 < x_0'$, se sigue $m_0 \prec m_0'$.

Con ello se ha demostrado la similitud de X y M, por lo que se cumple

$$\overline{M} = \theta.$$

§12.

Los conjuntos bien ordenados.

Entre los conjuntos simplemente ordenados los *conjuntos bien ordenados* detentan una posición destacada; sus tipos ordinales, que llamamos *“números ordinales”*, constituyen la materia natural para una definición de los números cardinales o cardinalidades transfinitas superiores, una definición de conformidad con la definición que dimos para el menor número cardinal transfinito *álef cero* mediante el sistema de todos los números finitos ν (§6).

“Bien ordenado” llamamos a un conjunto simplemente ordenado F (§7), cuando sus elementos f *crecen en una sucesión determinada* a partir de un menor elemento f_1, de tal forma que se satisfacen la dos siguientes condiciones:

I. *“Existe en* F *un elemento jerárquicamente menor* f_1*.”*

II. *"Si F' es un subconjunto de F y y F tiene uno o más elementos de mayor jerarquía que todos los elementos de F', entonces existe un elemento f' en F, que es el menor que sucede a todos los elementos de F', de tal suerte que no existe un elemento en F tal que, según el orden, esté entre*[4] *F' y f'."*

En particular, a cada elemento f de F le sucede, cuando no es el mayor elemento, un elemento distinto determinado f', según el orden, como el sucesor más inmediato; esto se deduce de la condición II, si por F' se ocupa el elemento f. Si además, por ejemplo, en F está contenida una sucesión de elementos consecutivos

$$e' \prec e'' \prec e''' \prec \cdots \prec e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \ldots$$

tal que en F existe un elemento que tiene mayor jerarquía que *cada elemento* $e^{(\nu)}$, por la condición II, si se sustituye en ella F' por la totalidad $\{e^{(\nu)}\}$, debe existir un elemento f' tal que no sólo ocurre

$$f' \succ e^{(\nu)}$$

para todo valor de ν, sino no que para *ningún elemento* g en F se satisfacen las condiciones:

$$g \prec f',$$
$$g \succ e^{(\nu)}$$

para todo valor de ν.

Por ejemplo, los tres conjuntos

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$$

donde

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3$$

están *bien ordenados*. Los dos primeros no tienen mayor elemento, el tercero tiene como mayor elemento a c_3; en el segundo y tercero sucede inmediatamente b_1 a los a_ν, en el tercero a todos los a_ν y b_μ los sucede inmediatamente c_1.

En lo sucesivo queremos extender el uso de los símbolos $\prec$ y $\succ$ definidos en §7 para la relación jerárquica entre dos elementos, a grupos de elementos, de tal suerte que las fórmulas

$$M \prec N,$$
$$M \succ N$$

expresen, que en el orden dado todos los elementos del conjunto M son menores, respectivamente mayores, que los elementos del conjunto N.

A. *"Todo subconjunto F_1 de un conjunto bien ordenado F tiene un menor elemento."*

Demostración. Si el menor elemento f_1 de F pertenece a F_1, éste es el menor elemento de F_1.

En otro caso sea F' la totalidad de elementos de F menores que todos los elementos de F_1, por lo que no hay un elemento de F entre F' y F_1.

Se sigue entonces (por II) que f' sucede inmediatamente a F', por lo que necesariamente pertenece a F_1 y tiene en él la menor jerarquía.

B. *"Si un conjunto simplemente ordenado F se construye de tal forma que tanto F como cada uno de sus subconjuntos tengan un menor elemento, entonces F es un conjunto bien ordenado."*

[4] Esta definición de "conjunto bien ordenado" coincide, no textualmente, con la introducida en Math. Annalen **21**, 548 (Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre, pág. 4).

Demostración. Puesto que F tiene un menor elemento, se satisface la condición I. Sea F' un subconjunto de F tal que en F hay uno o más elementos $\succ F'$; sea F_1 la totalidad de esos elementos y f' el menor elemento de F_1, entonces es claro que f' es el sucesor inmediato en F de F'. Con ello se satisface también la condición II, por lo que F es un conjunto bien ordenado.

C. *"Cada subconjunto F' de un conjunto bien ordenado F es también un conjunto bien ordenado."*

Demostración. Según el teorema A tanto F' como cada subconjunto F'' de F' (pues son a su vez subconjuntos de F) tienen un menor elemento; por lo que de acuerdo al teorema B, F' es un conjunto bien ordenado.

D. *"Cada conjunto G similar a un conjunto bien ordenado F es un conjunto bien ordenado"*

Demostración. Si M es un conjunto que posee un menor elemento, entonces cada conjunto similar a él tiene, como se sigue directamente de la noción de similitud (§7), un menor elemento.

Puesto que $G \simeq F$ se cumple y F tiene un menor elemento, lo mismo ocurre con G.

Igualmente cada subconjunto G' de G tiene un menor elemento; pues por la aplicación de G a F, el conjunto G' corresponde como imagen a un subconjunto F' de F, de tal forma que

$$G' \simeq F'.$$

Pero por el teorema A, F' tiene un menor elemento, por lo que también lo tiene G'. Por lo tanto, tanto G como cada subconjunto G' de G tienen un menor elemento; por el teorema B se deduce que G es un conjunto bien ordenado.

E. *"Si en un conjunto bien ordenado G se sustituyen sus elementos g por conjuntos bien ordenados en el sentido de que si los conjuntos bien ordenados F_g y $F_{g'}$ se sustituyen en lugar de los elementos g y g' y $g \prec g'$, entonces también $F_g \prec F_{g'}$, entonces el conjunto H, que se genera en esta forma, por la sustitución de elementos por conjuntos bien ordenados F_g, es un conjunto bien ordenado."*

Demostración. Tanto H como cada subconjunto H_1 de H tienen un menor elemento, lo que caracteriza a H, según el teorema B, como un conjunto bien ordenado. En efecto, si g_1 es el menor elemento de G, entonces el menor elemento de F_{g_1} es también el menor elemento de H. Si ahora se considera un subconjunto H_1 de H, sus elemento pertenecen a ciertos conjuntos F_g, al formar un conjunto con estos conjuntos F_g, se conforma un subconjunto del conjunto formado por los F_g, el conjunto bien ordenado $\{F_g\}$ similar a G; si, digamos, F_{g_0} es el menor elemento de este subconjunto, entonces el menor elemento del subconjunto de H_1 contenido en F_{g_0} es a la vez el menor elemento de H_1.

§13.

Las secciones de los conjuntos bien ordenados.

Si f es un elemento *distinto del primer elemento f_1* del conjunto bien ordenado F, llamamos al conjunto A de todos los elementos de F, que son $\prec f$, un *"sección de F"*, a saber, la sección *determinada por el elemento f*. En cambio, el conjunto R de todos los elementos restantes de F exceptuando f se llama *"el resto de F"*, a saber, el resto de F *determinado por el elemento f*. Los conjuntos A y R están, según el Teorema C, §12, *bien ordenados* y por §8 y §12 podemos escribir:

$$F = (A, R), \quad (1)$$

$$R = (f, R'), \quad (2)$$

$$A \prec R. \quad (3)$$

R' es la parte siguiente, en R, al elemento inicial f y se reduce a 0, cuando R no tiene otros elementos aparte de f.

Tomemos como ejemplo el conjunto bien ordenado

$$F = (a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots b_1, b_2, \dots b_\mu, \dots c_1, c_2, c_3),$$

en éste el elemento a_3 determina la sección

$$(a_1, a_2)$$

y el correspondiente resto

$$(a_3, a_4, \dots a_{\nu+2}, \dots b_1, b_2, \dots b_\mu, \dots c_1, c_2, c_3);$$

el elemento b_1 determina la sección

$$(a_1, a_2, \dots a_\nu, \dots)$$

y el correspondiente resto

$$(b_1, b_2, \dots b_\mu, \dots c_1, c_2, c_3),$$

mediante el elemento c_2 se determina la sección

$$(a_1, a_2, \dots a_\nu, \dots b_1, b_2, \dots b_\mu, \dots c_1)$$

y el resto

$$(c_2, c_3).$$

Si A y A' son dos secciones de F, f y f' los elementos que las determinan y se cumple

$$f' \prec f, \tag{4}$$

entonces A' es a su vez una sección de A.

Llamamos a A' la sección *menor*, A la *mayor* de F:

$$A' < A. \tag{5}$$

En forma correspondiente podemos decir de cada sección A de F que es menor a F mismo:

$$A < F. \tag{6}$$

A. *"Si dos conjuntos bien ordenados F y G se aplican uno en el otro, entonces a cada sección A de F corresponde una sección B de G similar y a cada sección B de G corresponde una sección similar A de F, y los elementos f y g de F y G, que determinan las secciones correspondientes A y B, se asocian uno al otro mediante la aplicación."*.

Demostración. Si se tienen dos conjuntos similares simplemente ordenados M y N que se aplican uno sobre el otro, si m y n son son dos elementos asociados, si M' es el conjunto de elementos de M que son $\prec m$, N' el conjunto de elementos de N que son $\prec n$, entonces la aplicación hace corresponder M' y N'. Pues a cada elemento $m' \prec m$ de M, debe corresponder (§7) un elemento $n' \prec n$ de N, y viceversa.

Si aplicamos este teorema a los conjuntos bien ordenados M y G, obtenemos lo que se que se debía demostrar.

B. *"Un conjunto bien ordenado F no es similar a ninguna de sus secciones A"*.

Demostración. Supongamos que $F \simeq A$, por lo que tenemos una aplicación de F sobre A. Por el teorema A corresponde a la sección A de F una sección A' de de A como imagen, de tal forma que $A' \simeq A$. Se tendría entonces también $A' \simeq F$ y se cumple $A' < A$. De A' se obtendría en la misma forma una sección menor A'' de F, tal que $A'' \simeq F$ y $A'' < A'$, etcétera.

Con este proceder obtendríamos una sucesión *necesariamente infinita*

$$A > A' > A'' \dots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)}, \dots$$

de secciones de F cada vez menores, similares al conjunto F.

Denotemos con $f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots$ los elementos que determinan en F estas secciones; entonces tendríamos

$$f \succ f' \succ f'' \cdots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)}, \cdots$$

obtendríamos entonces un subconjunto de F *infinito*

$$(f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots)$$

en el que *ningún elemento tiene la menor jerarquía.*

Pero por el teorema A, §12 *no es posible* la existencia de tales subconjuntos. La suposición de una apliación de F sobre una de sus secciones conduce a una contradicción, por lo que el conjunto no es similar a ninguna de sus secciones.

Si bien, según el teorema B, un conjunto bien ordenado F no es similar a ninguna de sus *secciones*, siempre existen, cuando F es *infinito*, *otros subconjuntos* de F similares a F. Por ejemplo, el conjunto

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

es similar a cada uno de sus restos

$$(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}, \ldots a_{\varkappa+\nu}, \ldots).$$

Es por ello importante que añadamos el siguiente resultado al Teorema B.

C. *"Un subconjunto F no es similar a ningún subconjunto de alguna de sus secciones".*

Demostración. Supongamos que F' es un subconjunto de una sección A de F y que $F' \simeq F$. Fijemos una aplicación de F sobre F'; por el teorema A a la sección A de F le corresponde como imagen una sección F'' del conjunto bien ordenado F'; digamos que esta sección está determinada por el elemento f' de F'. Como f' también es un elemento de A, determina una sección A' de A, de la cual F'' es un subconjunto.

La suposición de que F' es un subconjunto de la sección A de F con $F' \simeq F$, nos conduce a un subconjunto F'' de una sección A' de A con $F'' \simeq A$.

El mismo razonamiento propicia un subconjunto F''' de una sección A'' de A' tal que $F''' \simeq A'$. Si continuamos así, obtenemos, como en la demostración del teorema B, una sucesión *necesariamente infinita* de secciones de F cada vez menores

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \ldots$$

y con ello, una sucesión *infinita* de los elementos que determinan esas secciones

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \ldots,$$

en la que no aparecería un menor elemento, lo que es imposible según el teorema A, §12. Por lo tanto, no existe un subconjunto F' de una sección A de F tal que $F' \simeq F$.—

D. *"Dos secciones distintas A y A' de un conjunto bien ordenado F no son similares entre sí."*

Demostración. Si $A' < A$, entonces A' es una sección del conjunto bien ordenado A, por lo que no puede ser similar a A, según el teorema B.

E. *Dos conjuntos bien ordenados similares F y G se pueden aplicar uno sobre el otro en forma única."*

Demostarción. Fijemos dos aplicaciones distintas de F sobre G y sea f un elemento de F, para el cual correspondieran dos imágenes distintas g, g' en G de acuerdo a las dos aplicaciones distintas. Sea A la sección de F determinada por f, B y B' las secciones de G determinadas por g y g'. Por el teorema A se cumple tanto $A \simeq B$, como $A \simeq B'$, de donde se deduciría $B \simeq B'$, lo que contradice el teorema D.

F. *"Si F y G son dos conjuntos bien ordenados, entonces una sección A de F puede ser similar a lo sumo a una sección B de G."*

Demostración. Si la sección A de F fuese similar a dos secciones B y B' de G, sería tambien similares entre sí las secciones B y B', lo que es imposible de acuerdo al teorema D.

G. *“Si A y B son secciones similares de dos conjuntos bien ordenados F y G, entonces para cada sección menor $A' < A$ de F existe una sección similar $B' < B$ de G y para cada sección menor $B' < B$ de G existe una sección similar $A' < A$ de F.”*

Demostración. Se sigue del teorema A, cuando se aplica éste a los conjuntos similares A y B.

H. *“Si A y A' son dos secciones de un conjunto bien ordenado F, B y B' son secciones similares a ellas en un conjunto bien ordenado G, y si $A' < A$, entonces $B' < B$.”*

Demostración. Se sigue de los teoremas F y G.

J. *“Si una sección B de un conjunto bien ordenado G no es similar a ninguna sección de un conjunto bien ordenado F, entonces tampoco las secciones $B' > B$ de G ni G mismo son similares a secciones de F o a F mismo.”*

Demostración. Se sigue del teorema G.

K. *“Si para cada sección A de un conjunto bien ordenado F existe una sección similar a ella B de otro conjunto bien ordenado G, y recíprocamente, para cada sección B de G existe una sección A de F similar a ella, entonces $F \simeq G$.”*

Demostración. Podemos aplicar F sobre G de acuerdo a la siguiente prescripción:

El menor elemento f_1 de F corresponde al menor elemento g_1 de G. Si $f > f_1$ es algún otro elemento de F, él determina una sección A de F; a ella es similar, según la hipótesis, una sección B de G; el elemento g que determina esta sección lo hacemos la imagen de f. Si g es algún elemento de G, $\succ g_1$, él determina una sección B de G y por suposición existe una sección A de F similar a ella; sea f el elemento que determina A en F y lo hacemos la imagen de g.

El que esta correspondencia recíprocamente unívoca entre F y G es una *aplicación* en el sentido de §7 se verifica fácilmente.

A saber, sean f y f' son dos elementos arbitrarios de F, g y g' los elementos correspondientes de G, A y A' las secciones detrminadas por f y f', B y B' las determinadas por g y g' y si, digamos,

$$f' \prec f,$$

entonces

$$A' < A;$$

por lo que del teorema H se sigue que

$$B' < B$$

por consiguiente,

$$g' \prec g.$$

L. *“Si para cada sección A de un conjunto bien ordenado F existe una sección B similar a ella de otro conjunto bien ordenado G, y si por el contrario, existe al menos una sección de G que no sea similar a ninguna sección de F, entonces existe una sección B_1 de G tal que $B_1 \simeq F$.”*

Demostración. Consideramos todas las secciones de G, para las que no hay ninguna sección similar en F; entre ellas debe existir la *más pequeña*, que llamamos B_1. Esto se sigue de que, por el teorema A, §12, el conjunto de todos los elementos que determinan esas secciones tiene un menor elemento; la sección B_1 de G determinada por éste es la menor de aquella colección. Según el teorema J, *cada* sección de G, que sea $> B_1$ no es similar a ninguna sección de F; por lo que todas las secciones de G que sean similares a alguna de F deben ser $< B_1$, y de hecho a cada sección $B < B_1$ corresponde una sección similar A de F, pues B_1 es la menor sección de G para la cual no existe una sección en F similar a ella.

Por lo anterior existe para cada sección A de F una sección similar B de B_1 y para cada sección B de B_1 una sección similar A de F; por el teorema K se cumple entonces que

$$F \simeq B_1.$$

M. *"Si el conjunto bien ordenado G tiene al menos una sección para la que no existe una sección similar a ella en el conjunto bien ordenado F, entonces cada sección A de F debe ser similar a alguna sección B de G."*

Demostración. Sea B_1 la menor sección de G para la que no existe una sección en F similar a ella (compárese con la demostración de L.) Si hubiese secciones en F para las que no existieran secciones de G similares a ellas, habría tambien entre ellas una menor, digamos A_1. Cada sección de A_1 sería entonces similar a alguna sección de B_1 y cada sección de B_1 sería similar a alguna sección de A_1. Se sigue, por el teorema K, que

$$B_1 \simeq A_1.$$

Pero esto contradice el que B_1 no es similar a ninguna sección de F. Por lo tanto, no puede haber una sección en F que no sea similar a alguna sección en G.

N. *"Si F y G son dos conjuntos bien ordenados, entonces ya sea que 1) F y G son similares, o 2) existe una sección B_1 de G a la cual F es similar, o 3)existe una sección A_1 de F a la cual G es similar; cada uno de estos casos excluye la posibilidad de los otros dos."*

Demostración. El comportamiento de F con G tiene *tres* posibilidades:

1) Cada sección A de F es similar a alguna sección B de G y recíprocamente, cada sección B de G es similar a alguna sección A de F.

2) Cada sección A de F es similar a alguna sección B de G, pero existe al menos una sección B de G que no es similar a ninguna sección de F.

3) Cada sección B de G es similar a alguna sección A de F, pero existe al menos una sección A de F que no es similar a ninguna sección de G.

El caso en el que exista una sección de F que no es similar a ninguna de G y que existe una sección de G que no es similar a ninguna sección de F no es posible; se excluye por el teorema M.

Por el teorema K en el *primer* caso se cumple que

$$F \simeq G.$$

Por el teorema L en el *segundo* caso existe una sección B_1 de B tal que

$$B_1 \simeq F,$$

y en el *tercer* caso existe una sección A_1 de F tal que

$$A_1 \simeq G.$$

Pero no puede ocurrir simultáneamente $F \simeq G$ y $F \simeq B_1$, pues en tal caso tendríamos también $G \simeq B_1$, en oposición al teorema B, y por la misma razón no pueden ocurrir simultáneamente $F \simeq G$ y $G \simeq A_1$.

Pero también es imposible la validez simultánea de $F \simeq B_1$ y $G \simeq A_1$; porque por el teorema A de $F \simeq B_1$ se deduciría la existencia de una sección B_1' de B_1 tal que $A_1 \simeq B_1$. Pero se tendría entonces $G \simeq B_1'$ en oposición al teorema B.

O. *"Si un subconjunto F' de un conjunto bien ordenado F no es similar a ninguna sección de F, entonces es similar a F mismo."*

Demostración. Por el teorema C, §12 F' es un conjunto bien ordenado. Si F' no fuera similar a ninguna sección de F ni a F mismo, existiría por el teorema N una sección F_1' de F', que sería similar a F. Pero F_1' es un subconjunto de la sección A de F, que está determinada por el mismo elemento que el que determina la sección F_1' de F'. Por lo tanto, el conjunto F sería similar a un subconjunto de una de sus secciones, lo que contradice el teorema C.

§14.

Los números ordinales de conjuntos bien ordenados.

Según §7 cada conjunto simplemente ordendo M tiene asociado un determinado *tipo ordinal* $\overline{M}$; ésta es la noción general que se obtiene de M a partir de la jerarquía entre sus elementos sin considerar la naturaleza de estos, de tal suerte que de ellos se obtienen unidades que están sujetas a una determinada jerarquía. *Para todos los conjuntos similares entre sí y sólo para ellos está asociado un mismo tipo ordinal.*

El tipo ordinal de un conjunto bien ordenado F lo llamamos *"número ordinal"*

Si α y β son dos *números ordinales* arbitrarios, entonces tienen *tres* posibles relaciones entre sí. A saber, si F y G son dos conjuntos bien ordenados tales que

$$\overline{F} = \alpha, \quad \overline{G} = \beta,$$

entonces por el teorema N, §13 existen *tres* casos posibles mutuamente excluyentes:

1)

$$F \simeq G.$$

2) Existe una sección B_1 de G, tal que

$$F \simeq B_1.$$

3) Existe una sección A_1 de F tal que

$$G \simeq A_1.$$

Como se observa fácilmente, cualquiera de estos casos sigue cumpliéndose, si F y G se sustituyen por conjuntos similares a ellos F' y G'; según eso, tenemos que tratar con tres posibles relaciones mutuamente excluyentes entre los tipos α y β.

En el primer caso se tiene $\alpha = \beta$; en el segundo decimos que $\alpha < \beta$, en el tercero que $\alpha > \beta$.

Tenemos entonces el teorema:

A. *"Si α y β son dos números ordinales arbitrarios, entonces se cumple $\alpha = \beta$ o $\alpha < \beta$ o $\alpha > \beta$."*.

De la definición de mayor y menor se sigue fácilmente:

B. *"Si se tienen tres números ordinales α, β, γ y se cumple $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, entonces se cumple también $\alpha < \gamma$.*

Así que los números ordinales conforman según su *orden* un conjunto símplemente ordenado; después se mostrará que de hecho forman un conjunto *bien ordenado.*

Las operaciones definidas en §8 de *adición* y *multiplicación* de tipos ordinales de conjuntos simplemente ordenados arbitrarios se utilizan, naturalmente, también en los números ordinales.

Si $\alpha = \overline{F}$, $\beta = \overline{G}$, donde F y G son dos conjuntos bien ordenados, entonces

$$\alpha + \beta = \overline{(F, G)}. \tag{1}$$

El conjunto unión (F, G) es claramente un conjunto bien ordenado; tenemos entonces el teorema:

C. *"La suma de dos números ordinales es también un número ordinal."*

En la suma $\alpha + \beta$, α se llama el *"augendus"*, β el *"adendus"*.

Puesto que F es una *sección* de (F, G), siempre se cumple que:

$$\alpha < \alpha + \beta. \tag{2}$$

Por el contrario, G no es una *sección*, sino el *resto* de (F, G), por lo que puede ser similar, como vimos en §13, al conjunto (F, G); si esto no se cumple, entonces G es, por el teorema O,

§13, similar a una sección de (F, G). Por lo que

$$\beta \leq \alpha + \beta. \tag{3}$$

Así que tenemos:

D. *"La suma de dos números ordinales siempre es mayor que el augendus, en cambio es mayor o igual que el addendus. Si se tiene $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, siempre se deduce que $\beta = \gamma$."*

En general $\alpha + \beta$ y $\beta + \alpha$ no son iguales. En cambio se tiene, cuando γ es un tercer número ordinal, que

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma). \tag{4}$$

Así que:

E. *"La ley asociativa se cumple en la adición de números ordinales."*

Si se substituye en el conjunto G con tipo β *cada* elemento g por un conjunto F_g de tipo α, entonces se obtiene del teorema E, §12, un conjunto *bien ordenado* H, cuyo tipo está totalmente determinado por los tipos α y β y se llama el *producto* $\alpha \cdot \beta$:

$$\overline{F}_g = \alpha, \tag{5}$$

$$\alpha \cdot \beta = \overline{H}. \tag{6}$$

F. *"El producto de dos números ordinales es también un número ordinal.*

En el producto $\alpha \cdot \beta$, α se conoce como el *"multiplikandus"*, y β como el *"multiplicator"*.

En general, los números $\alpha \cdot \beta$ y $\beta \cdot \alpha$ no son iguales. Pero se tiene (§8)

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma). \tag{7}$$

Es decir,

G. *"La ley asociativa se cumple en la multiplicación de números ordinales"*.

La *ley distributiva* se cumple en general (§8) sólo en la siguiente forma:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \tag{8}$$

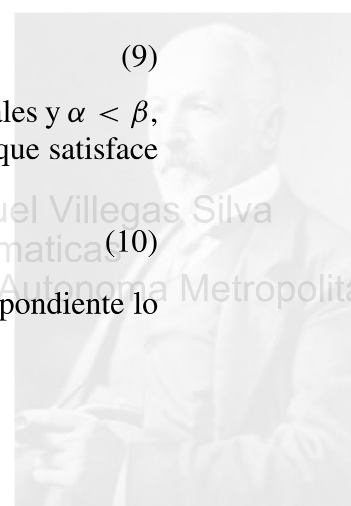
En relación a la magnitud del producto se cumple el siguiente teorema, que se verifica fácilmente:

H. *"Si el multiplicator es mayor que 1, el producto de dos números ordinales siempre es mayor que el multiplikandus, y es mayor o igual que el multiplicador. Si se tiene $\alpha\beta = \alpha\gamma$, siempre se deduce que $\beta = \gamma$."*

Por otro lado, es claro que

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha. \tag{9}$$

También tenemos la operación de *substracción.* Si α y β son dos números ordinales y $\alpha < \beta$, entonces siempre existe un determinado número ordinal, que llamaremos $\beta - \alpha$, que satisface la ecuación



$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta. \tag{10}$$

Pues si $\overline{G} = \beta$, entonces G tiene una sección B, tal que $\overline{B} = \alpha$; el resto correspondiente lo llamamos S y tenemos

$$G = (B, S) \quad \text{y}$$
$$\beta = \alpha + \overline{S},$$

así que

$$\beta - \alpha = \overline{S}. \tag{11}$$

La determinación de $\beta - \alpha$ se obtiene de que la sección B de G está totalmente determinada, por lo que S también está dado en forma única. Resaltamos las siguiente fórmulas, producto de (4), (8) y (10):

$$(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha, \tag{12}$$

$$\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha. \tag{13}$$

De gran significado es que siempre se puede sumar una cantidad infinita de números ordinales, y su suma es un número ordinal bien determinado sólo dependiente de la sucesión de sus sumandos.

Si, digamos,

$$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu, \dots$$

es una sucesión arbitraria, simple e infinita de números ordinales y se tiene

$$\beta_\nu = \overline{G}_\nu, \tag{14}$$

entonces también

$$G = (G_1, G_2, \dots G_\nu, \dots) \tag{15}$$

es un conjunto bien ordenado, cuyo número ordinal β representa la suma de los β_ν. Así que

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \overline{G} = \beta, \tag{16}$$

y se tiene, como se desprende fácilmente de la definición de producto, que

$$\gamma \cdot (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots) = \gamma \cdot \beta_1 + \gamma \cdot \beta_2 + \cdots + \gamma \cdot \beta_\nu + \cdots \tag{17}$$

Si hacemos

$$\alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu, \tag{18}$$

entonces

$$\alpha_\nu = \overline{(G_1, G_2, \dots G_\nu)}. \tag{19}$$

Se cumple

$$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu, \tag{20}$$

y según (10) podemos expresar los números β_ν mediante los números α_ν como sigue:

$$\beta_1 = \alpha_1; \quad \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu. \tag{21}$$

La sucesión

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu, \dots$$

representa entonces una sucesión infinita *arbitraria* de números ordinales que satisfacen la *condición* (20); la llamamos una *"sucesión fundamental"* de números ordinales (§10); entre ellos y β se origina una relación que podemos expresar del siguiente modo:

1) β es $> \alpha_\nu$ para cada ν, pues el conjunto $(G_1, G_2, \dots, G_\nu)$, cuyo número ordinal es α_ν, es una *sección* del conjunto G que tiene número ordinal β.

2) Si β' es *algún* número ordinal $< \beta$, entonces a partir de un cierto ν se cumple siempre

$$\alpha_\nu > \beta'.$$

Porque, dado que $\beta' < \beta$, existe una sección B' del conjunto G de tipo β'. El elemento de G que determina esta sección debe pertenecer a alguno de los subconjuntos G_ν, que llamamos G_{ν_0}. Pero entonces B' es también una sección de $(G_1, G_2, \dots G_{\nu_0})$ y por consiguiente $\beta' < \alpha_{\nu_0}$, por lo que

$$\alpha_\nu > \beta'$$

para $\nu \geq \nu_0$.

Por lo anterior resulta β el ordinal más pequeño sucesor de todos los α_ν; por ello lo llamaremos *el límite* de los α_ν para ν creciente y lo denotamos con $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$, de tal suerte que por (16) y (21)

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha_\nu = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) + \cdots \tag{22}$$

Podemos expresar lo anterior en el siguiente teorema:

I. *“A cada sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ de números ordinales pertenece un número ordinal $\text{Lím}_\nu\, \alpha_\nu$, que sucede inmediatamente, según su magnitud, a todos los α_ν; se representa mediante la fórmula (22).”*

Si γ es un número ordinal fijo, se demuestra con facilidad con ayuda de las fórmulas (12), (13), (17) los teoremas contenidos en las siguientes fórmulas:

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} (\gamma + \alpha_\nu) = \gamma + \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha_\nu, \tag{23}$$

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} \gamma \cdot \alpha_\nu = \gamma \cdot \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha_\nu. \tag{24}$$

Ya hemos mencionado en §7 que todos los conjuntos simplemente ordenados con número cardinal *finito* dado ν tienen el mismo tipo ordinal. Esto se puede demostrar como a continuación. Cada conjunto simplemente ordenado con número cardinal *finito* es un conjunto *bien ordenado*; porque tanto él como cada uno de sus subconjuntos deben tener un menor elemento, lo que lo caracteriza según el teorema B, §12 como un conjunto bien ordenado.

Los tipos de los conjuntos simplemente ordenados finitos no son, por tanto, otra cosa que *números ordinales finitos*. Dos números ordinales distintos α y β no pueden asociarse al mismo número cardinal *finito* ν. En efecto, si $\alpha < \beta$ y $\overline{G} = \beta$, existe, como ya sabemos, una sección B de G con $\overline{B} = \alpha$.

Entonces el conjunto G y su subconjunto B se servirían del mismo número cardinal ν. Pero esto es imposible según el teorema C, §6.

Los *números ordinales finitos* coinciden en sus propiedades con los *números cardinales finitos*.

Muy distinto se comportan los *números ordinales transfinitos*; para un número cardinal transfinito $\mathfrak{a}$ existe una cantidad *infinita* de números ordinales, los cuales conforman un sistema intrinsecamente relacionado, que llamaremos la “clase de números $Z(\mathfrak{a})$”. Ella es una subclase de la clase tipo $[\mathfrak{a}]$ (§7).

El siguiente asunto a considerar lo constituye la clase de números $Z(\aleph_0)$, que llamremos la *segunda clase de números*.

En este contexto entendemos por *primera clase de números* la totalidad $\{\nu\}$ de los números ordinales *finitos*.

§15.

Los números de la segunda clase de números $Z(\aleph_0)$.

La segunda clase de números $Z(\aleph_0)$ es la totalidad $\{\alpha\}$ de los tipos ordinales α de conjuntos bien ordenados con número cardinal $\aleph_0$ (§6).

A. *“La segunda clase de números tiene un menor número $\omega = \text{Lím}_\nu\, \nu$.”*

Demostración. Por ω entendemos el tipo del conjunto bien ordenado

$$F_0 = (f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots), \tag{1}$$

donde ν recorre los números ordinales finitos y

$$f_\nu \prec f_{\nu+1}. \tag{2}$$

Así que (§7)

$$\omega = \overline{F}_0 \tag{3}$$

y (§6)

$$\overline{\omega} = \aleph_0. \tag{4}$$

Por lo tanto, ω es un número de la segunda clase, y de hecho, el *menor*. Pues si γ es un número ordinal $< \omega$, debe ser el tipo (§14) de una *sección* de F_0. Pero F_0 sólo tiene secciones de la forma

$$A = (f_1, f_2, \dots f_\nu)$$

con ν un número ordinal *finito*. Por consiguiente $\gamma = \nu$.

Así que no existen números ordinales *transfinitos* menores que ω, que por ello es el menor de todos. Por la definición de $\text{Lím}_\nu \alpha_\nu$ dada en §14 se cumple claramente que $\omega = \text{Lím}_\nu \nu$.

B. *“Si α es un número de la segunda clase, su sucesor inmediato en la misma clase de números es el número $\alpha + 1$.”*

Demostración. Sea F un conjunto bien ordenado de tipo α y con número cardinal $\aleph_0$, es decir

$$\overline{F} = \alpha, \tag{5}$$

$$\overline{\alpha} = \aleph_0. \tag{6}$$

Si g es un nuevo elemento, tenemos que

$$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}. \tag{7}$$

Puesto que F es una sección de (F, g), tenemos

$$\alpha + 1 > \alpha. \tag{8}$$

Se cumple que

$$\overline{\alpha + 1} = \overline{\alpha} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (\S 6).$$

El número $\alpha + 1$ pertenece entonces a la segunda clase de números. Entre α y $\alpha + 1$ no hay números ordinales; pues cada número γ que sea $< \alpha + 1$ corresponde al tipo de una sección de (F, g); tal sección sólo puede ser F o una sección de F. Así que γ es $=$ o $< \alpha$.

C. *“Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu, \dots$ es una sucesión fundamental de números de la primera o segunda clase de números, entonces el número $\text{Lím}_\nu \alpha_\nu$ (§14) sucesor inmediato de todos los α_ν pertenece a la segunda clase de números.”*

Demostración. Por §14 se obtiene de la sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ el número $\text{Lím}_\nu \alpha_\nu$, si producimos otra sucesión $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu, \dots$ tal que

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \dots$$

Si $G_1, G_2, \dots G_\nu, \dots$ son conjuntos bien ordenados tales que

$$\overline{G}_\nu = \beta_\nu,$$

entonces también

$$G = (G_1, G_2, \dots G_\nu, \dots)$$

es un conjunto bien ordenado y

$$\text{Lím}_\nu \alpha_\nu = \overline{G}.$$

Se trata ahora sólo de probar que

$$| G | = \aleph_0.$$

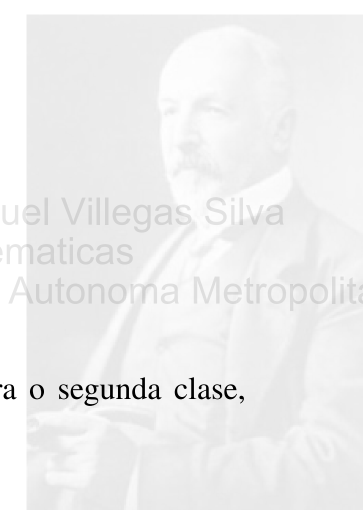
Pero puesto que los números $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu, \dots$ pertenecen a la primera o segunda clase, entonces

$$| G_\nu | \leq \aleph_0,$$

y por ello

$$| G | \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Pero como G es un conjunto transfinito, se excluye el caso $| G | < \aleph_0$.



Dos *sucesiones fundamentales* $\{\alpha_\nu\}$ y $\{\alpha'_\nu\}$ de números de la primera o segunda clase de números las llamamos *“correspondientes”*, en símbolos

$$\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha'_\nu\}, \tag{9}$$

si para cada ν existen números finitos λ_0, μ_0 tales que

$$\alpha'_\lambda > \alpha_\nu, \quad \lambda \geq \lambda_0, \tag{10}$$

y

$$\alpha_\mu > \alpha'_\nu, \quad \mu \geq \mu_0. \tag{11}$$

D. *“Los números límite Lím $_\nu \alpha_\nu$ y Lím $_\nu \alpha'_\nu$ correspondientes a las sucesiones fundamentales $\{\alpha_\nu\}$, $\{\alpha'_\nu\}$ son iguales si y sólo si $\{\alpha_\nu\}\|\{\alpha'_\nu\}$.”*

Demostración. Por simplicidad hacemos $\text{Lím}_\nu \alpha_\nu = \beta$, $\text{Lím}_\nu \alpha'_\nu = \gamma$.

Primero supongamos que $\{\alpha_\nu\}\|\{\alpha'_\nu\}$, y afirmamos que $\beta = \gamma$. En efecto, si β no fuera igual a γ, alguno de estos dos números debería ser el menor, digamos $\beta < \gamma$. A partir de un cierto ν tendríamos $\alpha'_\nu > \beta$, por lo que según (11) a partir de un cierto μ, $\alpha_\mu > \beta$. Pero esto es imposible, porque $\beta = \text{Lím}_\nu \alpha_\nu$ así que para toda μ $\alpha_\mu < \beta$.

Si recíprocamente, se supone que $\beta = \gamma$, puesto que $\alpha_\nu < \gamma$, se debe cumplir que $\alpha'_\lambda > \alpha_\nu$ a partir de un cierto λ y dado que $\alpha'_\nu < \beta$ a partir de un cierto μ, debemos tener $\alpha_\mu > \alpha'_\nu$; es decir, $\{\alpha_\nu\}\|\{\alpha'_\nu\}$.

E. *“Si α es un número de la segunda clase de números, ν_0 un número ordinal finito arbitrario, entonces $\nu_0 + \alpha = \alpha$, por lo que también $\alpha - \nu_0 = \alpha$.”*

Demostración. Primero nos convencemos de la validez del teorema cuando $\alpha = \omega$. Se tiene

$$\omega = \overline{(f_1, f_2, \dots f_\nu, \dots)},$$
$$\nu_0 = \overline{(g_1, g_2, \dots g_{\nu_0})},$$

así que

$$\nu_0 + \omega = \overline{(g_1, g_2, \dots g_{\nu_0}, f_1, f_2, \dots f_\nu \dots)} = \omega.$$

Pero si $\alpha > \omega$, tenemos que

$$\alpha = \omega + (\alpha - \omega),$$
$$\nu_0 + \alpha = (\nu_0 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha.$$

F. *“Si ν_0 es un número ordinal finito, entonces $\nu_0 \cdot \omega = \omega$.”*

Demostración. Para obtener un conjunto de tipo $\nu_0 \cdot \omega$, se deben sustituir los elementos f_ν del conjunto $(f_1, f_2, \dots f_\nu, \dots)$ por conjuntos $(g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \dots g_{\nu,\nu_0})$ de tipo ν_0. Se obtiene el conjunto

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \dots g_{1,\nu_0}, g_{2,1}, \dots g_{2,\nu_0}, \dots g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \dots g_{\nu,\nu_0}, \dots),$$

que es claramente similar al conjunto $\{f_\nu\}$; en consecuencia

$$\nu_0 \omega = \omega.$$

En forma más breve se obtiene lo mismo como sigue: según (24) §14 y puesto que $\omega = \text{Lím}_\nu \nu$, se tiene

$$\nu_0 \omega = \operatorname*{Lím}_\nu \nu_0 \nu.$$

Por otro lado,

$$\{\nu_0 \nu\} \| \{\nu\},$$

por lo que

$$\operatorname*{Lím}_\nu \nu_0 \nu = \operatorname*{Lím}_\nu \nu = \omega,$$

así que

$$\nu_0\omega = \omega.$$

G. *"Siempre se cumple*

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \alpha\omega,$$

para un número α de la segunda clase y ν_0 un número de la primera clase."

Demostración. Tenemos

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} \nu = \omega.$$

Según (24) §14 se deduce que

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \operatorname*{Lím}_{\nu} (\alpha + \nu_0)\nu.$$

Pero entonces

$$\begin{aligned}(\alpha + \nu_0)\nu &= \overbrace{(\alpha + \nu_0)}^{1} + \overbrace{(\alpha + \nu_0)}^{2} + \cdots + \overbrace{(\alpha + \nu_0)}^{\nu} \\ &= \alpha + \overbrace{(\nu_0 + \alpha)}^{1} + \overbrace{(\nu_0 + \alpha)}^{2} \cdots \overbrace{(\nu_0 + \alpha)}^{(\nu-1)} + \nu_0 \\ &= \overbrace{\alpha}^{1} + \overbrace{\alpha}^{2} + \cdots + \overbrace{\alpha}^{\nu} + \nu_0 \\ &= \alpha\nu + \nu_0.\end{aligned}$$

Ahora se tiene, como se verifica fácilmente

$$\{\alpha\nu + \nu_0\} \| \{\alpha\nu\}$$

y por consiguiente

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} (\alpha + \nu_0)\nu = \operatorname*{Lím}_{\nu} (\alpha\nu + \nu_0) = \operatorname*{Lím}_{\nu} \alpha\nu = \alpha\omega.$$

H. *"Si α es un número de la segunda clase de números, entonces la totalidad $\{\alpha'\}$ de los números α' de la primera y segunda clase de números menores que α conforman un conjunto bien ordenado, de acuerdo a su magnitud, con tipo α."*

Demostración. Sea F un conjunto bien ordenado tal que $\overline{F} = \alpha$; sea f_1 el menor elemento de F. Si α' es un número ordinal arbitrario $< \alpha$, entonces existe (§14) una sección A' de F al que

$$\overline{A'} = \alpha',$$

y recíprocamente, cada sección A' determina por su tipo $\overline{A'} = \alpha'$ un número $\alpha' < \alpha$ de la primera o segunda clase de números, porque, en vista de que $| F | = \aleph_0$, $| A' |$ sólo puede ser un número cardinal finito o $\aleph_0$.

La sección A' está determinada por un elemento $f' \succ f_1$ de F, y recíprocamente, cada elemento $f' \succ f_1$ de F determina una sección A' de F. Si f' y f'' son dos elementos $\succ f_1$ de F, A' y A'' son las secciones que determinan en F, α' y α'' sus tipos ordinales, y si, digamos, $f' \prec f''$, entonces (§13) $A' < A''$, por lo que $\alpha' < \alpha''$. Por ello hagamos $F = (f_1, F')$, y logramos una aplicación entre esto conjuntos, si asociamos al elemento α' de $\{\alpha'\}$ el elemento f' de F'. Con ello se tiene

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Pero se cumple $\overline{F'} = \alpha - 1$ y (según el teorema E) $\alpha - 1 = \alpha$, por lo que

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

Ya que $\overline{\alpha} = \aleph_0$, entonces también $| \{\alpha'\} | = \aleph_0$; en consecuencia, se cumple:

J. *"El conjunto $\{\alpha'\}$ de los números α' de la primera y segunda clase menores que un número α de la segunda clase de números, tiene cardinalidad $\aleph_0$."*

K. *"Cada número α de la segunda clase de números se obtiene de un predecesor inmediato $\underline{\alpha}_1$ mediante la adición de 1:*

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1,$$

o se puede dar una sucesión fundamental $\{\alpha_\nu\}$ de números de la primera o segunda clase de números tal que

$$\alpha = \operatorname*{Lím}_\nu \alpha_\nu."$$

Demostración. Sea $\alpha = \overline{F}$. Si F tiene un mayor elemento g, entonces $F = (A, g)$, donde A es la sección determinada por g en F. Entonces tenemos el primer caso, a saber,

$$\alpha = \overline{A} + 1 = \underline{\alpha}_1 + 1.$$

En consecuencia, existe un *predecesor inmediato* que también se llama $\underline{\alpha}_1$.

Si F no posee un mayor elemento, entonces consideramos el conjunto $\{\alpha'\}$ de los números de la primera y segunda clase de números que sean menores que α. Por el teorema H el conjunto $\{\alpha'\}$ es similar en su orden al conjunto F; por ello entre los *números* α' no hay ninguno que sea el mayor. Según el teorema J, el conjunto $\{\alpha'\}$ se puede poner en la forma de una sucesión simple $\{\alpha'_\nu\}$ infinita. Si empezamos con α'_1, entonces los sucesores según este orden, que difiere del orden según la magnitud, $\alpha'_2, \alpha'_3 \ldots$ serán menores que α'_1; en cualquier caso en lo sucesivo aparecen miembros $> \alpha'_1$; porque α'_1 no puede ser mayor que el resto de los miembros, ya que entre los números $\{\alpha'_\nu\}$ no hay uno mayor. Entre los α'_ν mayores que α'_1 sea α'_{ρ_2} el de menor índice. De igual manera, sea α'_{ρ_3} el número de la sucesión $\{\alpha'_\nu\}$ mayor que α'_{ρ_2} con el menor índice. Si continuamos así, obtenemos una sucesión infinita creciente de números, una sucesión fundamental

$$\alpha'_1, \alpha'_{\rho_2}, \alpha'_{\rho_3}, \ldots \alpha'_{\rho_\nu}, \ldots$$

Se cumple que

$$\begin{gathered} 1 < \rho_2 < \rho_3 < \cdots < \rho_\nu < \rho_{\nu+1}, \ldots \\ \alpha'_1 < \alpha'_{\rho_2} < \alpha'_{\rho_3} < \cdots < \alpha'_{\rho_\nu} < \alpha'_{\rho_{\nu+1}} \ldots, \\ \alpha'_\mu < \alpha'_{\rho_\nu}, \quad \text{cuando} \quad \mu < \rho_\nu, \end{gathered}$$

y ya que claramente $\nu \leq \rho_\nu$, siempre tenemos

$$\alpha'_\nu \leq \alpha'_{\rho_\nu}.$$

Se deduce que cada número α'_ν, y por ello también cada número $\alpha' < \alpha$ será superado por un número α'_{ρ_ν} para un valor de ν suficientemente grande.

Pero α es el sucesor inmediato de todos los números α', por ello es también el sucesor inmediato de los α'_{ρ_ν}. Por lo anterior, hacemos $\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha_{\rho_{\nu+1}} = \alpha_{\nu+1}$, así que

$$\alpha = \operatorname*{Lím}_\nu \alpha_\nu.$$

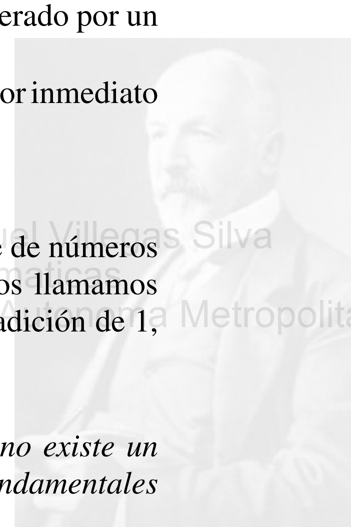
De los teoremas $B, C, \ldots, K$ se desprende que los números de la segunda clase de números se obtienen en dos formas a partir de números menores. A los de la primera, los llamamos *números del primer tipo*, se obtienen de un predecesor inmediato $\underline{\alpha}_1$ mediante la adición de 1, según la fórmula

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1;$$

los otros, los llamamos *números del segundo tipo*, son aquellos para los cuales *no existe un predecesor inmediato* $\underline{\alpha}_1$; estos aparecen como *números límite* de *sucesiones fundamentales* $\{\alpha_\nu\}$ según la fórmula:

$$\alpha = \operatorname*{Lím}_\nu \alpha_\nu.$$

Aquí α es el *sucesor inmediato*, según el orden, de todos los números α_ν.



Estas dos formas de producir números mayores a partir de menores las llamamos *el primero y segundo principio de construcción* de los números de la segunda clase de números.

§16.

La cardinalidad de la segunda clase de números es igual al segundo menor número cardinal transfinito álef uno.

Antes de que nos dediquemos en los siguientes párrafos a la consideración de los números de la segunda clase y su cardinalidad dominante, queremos responder la pregunta sobre el número cardinal, asociado al conjunto de todos estos números, $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$.

A. *"La totalidad $\{\alpha\}$ de los números α de la segunda clase conforma un conjunto bien ordenado según la magnitud."*

Demostración. Por A_α entendemos la totalidad de los números de la *segunda*, menores que el número dado α, en su orden de acuerdo a la magnitud, así que A_α es un conjunto bien ordenado de tipo $\alpha - \omega$. Esto se deduce del teorema H, §15. El conjunto, que allí se denotó con $\{\alpha'\}$, de todos los números α' de la *primera* y *segunda* clase se obtiene de la unión de $\{\nu\}$ y A_α, de tal suerte que

$$\{\alpha'\} = (\{\nu\}, A_\alpha).$$

Por ello

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{\nu\}} + \overline{A}_\alpha$$

y puesto que

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha, \quad \overline{\{\nu\}} = \omega,$$

se cumple que

$$\overline{A}_\alpha = \alpha - \omega.$$

Sea J un subconjunto de $\{\alpha\}$ tal que existen números en $\{\alpha\}$ mayores que todos los números en J. Sea α_0 uno de esos números. Entonces J también es un subconjunto de A_{α_0+1}, y de hecho, tal que al menos el número α_0 de A_{α_0+1} es mayor que todos los números en J. Puesto que A_{α_0+1} es un conjunto bien ordenado, debe existir (§12) un número α' de A_{α_0+1}, y que por ello pertenece a $\{\alpha\}$, que sea el sucesor inmediato de todos los números en J. Con ello se satisfacen las condiciones II, §12 respecto a $\{\alpha\}$; la condición I, §12 también se satisface, pues $\{\alpha\}$ contiene al menor número ω.

Si aplicamos los teoremas A y C al conjunto $\{\alpha\}$, se obtienen los siguientes teoremas:

B. *"Cada conjunto de números distintos de la primera y segunda clase tiene un menor elemento, un mínimo."*

C. *"Cada conjunto de números distintos de la primera y segunda clase considerados con el orden respecto a la magnitud es un conjunto bien ordenado."*

Primero se muestra que la cardinalidad de la segunda clase de números es distinta a la de los de la primera clase, que es $\aleph_0$.

D. *"La cardinalidad de la totalidad $\{\alpha\}$ de los números α de la segunda clase de números no es igual a $\aleph_0$."*

Demostración. Si tuviesemos $|\{\alpha\}| = \aleph_0$, podríamos representar a la totalidad de $\{\alpha\}$ en la forma de una sucesión simple e infinita

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots .\gamma_\nu, \ldots$$

de tal forma que $\{\gamma_\nu\}$, la totalidad de los números de la segunda clase de números, se podría representar en un orden distinto al dado por la magnitud y $\{\gamma_\nu\}$ no contendría un mayor elemento, mucho menos $\{\alpha\}$.

Partiendo de γ_1, sea γ_{ρ_2} el miembro con menor índice de esa sucesión $> \gamma_1$, γ_{ρ_3} el miembro con menor índice $> \gamma_{\rho_2}$, etcétera. Obtenemos una sucesión infinita creciente de números

$$\gamma_1, \gamma_{\rho_2}, \ldots \gamma_{\rho_\nu}, \ldots ,$$

tal que

$$\begin{gathered} 1 < \rho_2 < \rho_3 \cdots \rho_\nu < \rho_{\nu+1}, \ldots , \\ \gamma_1 < \gamma_{\rho_2} < \gamma_{\rho_3} \cdots \gamma_{\rho_\nu} < \gamma_{\rho_{\nu+1}}, \\ \gamma_\nu \leq \gamma_{\rho_\nu}. \end{gathered}$$

Según el teorema C, §15 existiría un determinado número δ de la segunda clase de números, a saber,

$$\delta = \operatorname*{Lím}_{\nu} \gamma_{\rho_\nu},$$

que sería mayor que todos los γ_{ρ_ν}; por consiguiente se tendría

$$\delta > \gamma_\nu$$

para cada ν.

Si $\{\gamma_\nu\}$ contiene a *todos* los números de la segunda clase de números, tiene también al número δ; así que para un cierto ν_0 se cumpliría

$$\delta = \gamma_{\nu_0},$$

ecuación que es incompatible con la relación $\delta > \gamma_{\nu_0}$. La suposición $\mid \{\alpha\} \mid = \aleph_0$ conduce entonces a una contradicción.

E. *"Un conjunto arbitrario $\{\beta\}$ de números β de la segunda clase de números tiene, cuando él es infinito, el número cardinal $\aleph_0$ o el número cardinal $\mid \{\alpha\} \mid$ de la segunda clase de números."*

Demostración. El conjunto $\{\beta\}$ en el orden de acuerdo a la magnitud es, como subconjunto del conjunto bien ordenado $\{\alpha\}$ según el teorema O, §13, similar a una sección A_{α_0} del último (es decir, al conjunto de todos los números de la segunda clase de números $< \alpha_0$, en el orden dado por su magnitud) o es similar a $\{\alpha\}$. Como se probó en la demostración del teorema A, se tiene $\overline{A}_{\alpha_0} = \alpha_0 - \omega$.

Tenemos entonces $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$ o $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$, por lo que también $\mid \{\beta\} \mid$ es $= \overline{\alpha_0 - \omega}$ o $=\mid \{\alpha\} \mid$. Pero $\overline{\alpha_0 - \omega}$ es un número cardinal finito o $= \aleph_0$ (teorema I, §15). El primer caso se excluye aquí pues $\{\beta\}$ se supuso un conjunto infinito. Por lo tanto, el número cardinal $\mid \{\beta\} \mid$ es $= \aleph_0$ o $=\mid \{\alpha\} \mid$.

F. *"La cardinalidad de la segunda clase de números $\{\alpha\}$ es el segundo menor cardinal transfinito álef uno."*

Demostración. No exite ningún número cardinal $\mathfrak{a}$ que sea $> \aleph_0$ y $<\mid \{\alpha\} \mid$. En caso contrario, por §2 existiría un subconjunto infinito $\{\beta\}$ de $\{\alpha\}$ tal que $\mid \{\beta\} \mid = \mathfrak{a}$.

Como consecuencia del teorema E recién demostrado el conjunto $\{\beta\}$ tiene el número cardinal $\aleph_0$ o el número cardinal $\mid \{\alpha\} \mid$. En consecuencia, el número cardinal $\mid \{\alpha\} \mid$ es necesariamente el sucesor inmediato, según la magnitud, de $\aleph_0$ que llamamos $\aleph_1$.

Por consiguiente, en la segunda clase de números $Z(\aleph_0)$ tenemos el *representante* natural para el segundo menor número cardinal *álef uno*.

§17.

Los números de la forma $\omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1} \nu_1 + \cdots + \nu_\mu$.

Es conveniente acostumbrarnos a trabajar con aquellos números de $Z(\aleph_0)$ que son funciones enteras (racionales) de grado finito en ω. Cada uno de tales números se puede escribir en forma única como

$$\varphi = \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_{\mu}, \tag{1}$$

donde μ, ν_0 son finitos y distintos de cero, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ pueden ser cero. Esto se debe a que

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu = \omega^{\mu}\nu, \tag{2}$$

cuando $\mu' < \mu$ y $\nu > 0$.

Porque según (8), §14 se cumple

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu = \omega^{\mu'}(\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu),$$

y por el teorema E, §15

$$\nu' + \omega^{\mu-\nu'}\nu = \omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

En consecuencia, en algunas expresiones de la forma

$$\cdots + \omega^{\mu'}\nu' + \omega^{\mu}\nu + \cdots$$

se puede prescindir de los miembros que, moviéndose hacia la derecha, suceden a miembros de grado superior en ω. Este procedimiento se puede continuar hasta que se obtiene la fórmula en (1). Debemos remarcar que

$$\omega^{\mu} + \omega^{\mu}\nu' = \omega^{\mu}(\nu + \nu'). \tag{3}$$

Comparemos ahora el número φ con un número ψ del mismos tipo

$$\psi = \omega^{\lambda}\rho_0 + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\lambda. \tag{4}$$

Si μ y λ son distintos, digamos $\mu < \lambda$, entonces por (2)

$$\varphi + \psi = \psi,$$

por lo que

$$\varphi < \psi.$$

Si $\mu = \lambda$, ν_0 y ρ_0 distintos y, digamos $\nu_0 < \rho_0$, entonces por (2)

$$\varphi + (\omega^{\lambda}(\rho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\mu) = \psi,$$

por lo que también

$$\varphi < \psi.$$

Finalmente, si

$$\mu = \lambda, \nu_0 = \rho_0, \nu_1 = \rho_1, \ldots \nu_{\sigma-1} = \rho_{\sigma-1}, \quad \sigma \leq \mu,$$

mientras que ν_σ y ρ_σ son distintos, digamos $\nu_\sigma < \rho_\sigma$, entonces por (2)

$$\varphi + (\omega^{\lambda-\sigma}(\rho_\sigma - \nu_\sigma) + \omega^{\lambda-\sigma-1}\rho_{\sigma+1} + \cdots + \rho_\mu) = \psi,$$

y otra vez

$$\varphi < \psi.$$

Así, hemos visto que sólo para identidad completa de las expresiones φ y ψ pueden ser iguales los números por ellas representados.

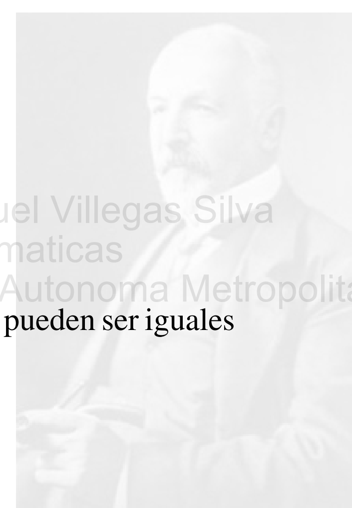
La *adición* de φ y ψ conduce al siguiente resultado:

1) si $\mu < \lambda$, entonces, como se observo antes,

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Si $\mu = \lambda$, se tiene

$$\varphi + \psi = \omega^{\lambda}(\nu_0 + \rho_0) + \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_\lambda.$$



3) Si $\mu > \lambda$, se tiene

$$\begin{aligned}\varphi + \psi =& \omega^{\mu}\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1} + \omega^{\lambda}(\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\\ &+ \omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \rho_{\lambda}.\end{aligned}$$

Para efectuar la multiplicación de φ y ψ, observemos que, si ρ es un número finito distinto de cero, la fórmula es

$$\varphi\rho = \omega^{\mu}\nu_0\rho + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_{\mu}. \tag{5}$$

Ella se obtiene fácilmente mediante la realización de la suma $\varphi + \varphi + \cdots + \varphi$ que consiste en ρ sumandos.

Mediante repetidas aplicaciones del teorema G, §15, se obtiene además, tomado en cuenta F, §15

$$\varphi\omega = \omega^{\mu+1}, \tag{6}$$

por lo que también

$$\varphi\omega^{\lambda} = \omega^{\mu+\lambda}. \tag{7}$$

Por la ley distributiva, se tiene

$$\varphi\psi = \varphi\omega^{\lambda}\rho_0 + \varphi\omega^{\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \varphi\omega_{\lambda-1} + \varphi\rho_{\lambda}.$$

Las fórmulas (4), (5) y (7) propician entonces el siguiente resultado:

1) Si $\rho_{\lambda} = 0$, se cumple

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\rho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1} = \omega^{\mu}\psi.$$

2) Si ρ_{λ} no es $= 0$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi\psi =& \omega^{\mu+\lambda}\rho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\rho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\rho_{\lambda-1} +\\ &+ \omega^{\mu}\nu_0\rho_{\lambda} + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_{\mu}.\end{aligned}$$

De la siguiente forma logramos una notable descomposición de los números φ: sea

$$\varphi = \omega^{\mu}\varkappa_0 + \omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau}, \tag{8}$$

donde

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_{\tau} \geq 0$$

y los números $\varkappa_0, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{\tau}$ son distintos de cero y finitos. Entonces tenemos

$$\varphi = (\omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \omega^{\mu_2}\varkappa_2 + \cdots + \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau})(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1).$$

Mediante repetidas aplicaciones de esta fórmula obtenemos

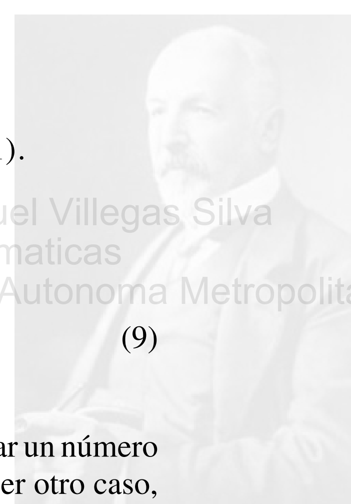
$$\varphi = \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau}(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau-1} + 1)(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}\varkappa_{\tau-2} + 1)\cdots(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1).$$

Pero tenemos

$$\omega^{\lambda}\varkappa + 1 = (\omega^{\lambda} + 1)\varkappa,$$

cuando $\varkappa$ es un número finito distinto de cero, por lo que

$$\begin{aligned}\varphi = \omega^{\mu_{\tau}}\varkappa_{\tau}(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_{\tau}} + 1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}} + 1)\varkappa_{\tau-2}\cdots\\ \cdots(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)\varkappa_0.\end{aligned} \tag{9}$$



Los factores $\omega^{\lambda} + 1$ que aparecen aquí son todos *indivisibles*, y se puede representar un número φ como este producto *en forma única*. Si $\mu_{\tau} = 0$, φ es del *primer tipo*, en cualquier otro caso, del *segundo* tipo.

La aparente desviación de las fórmulas en este parágrafo de aquellas dadas en (III 4, Nr. 5, §14, págs. 203 y siguientes), resulta sólo de la forma de escribir el producto de dos números, pues en esta ocasión pusimos el multiplikandus a la izquierda, el multiplicator a la derecha, mientras que antes seguimos la regla contraria.

§18.

La potencia γ^α en el dominio de la segunda clase de números.

Sea ξ una *variable*, cuyo dominio consiste en los números de la primera y segunda clase con excepción de 0. Sean γ y δ dos *constantes* pertenecinetes al mismo dominio, a saber,

$$\delta > 0, \quad \gamma > 1.$$

Podemos fundamentar el siguiente teorema:

A. *"Existe una única función totalmente determinada $f(\xi)$ de la variable ξ que satisface las siguientes condiciones:*

1) $f(0) = \delta$.

2) Si ξ' y ξ'' son dos valores arbitrarios de ξ, y

$$\xi' < \xi'',$$

entonces

$$f(\xi') < f(\xi'').$$

3) Para cada valor de ξ se cumple

$$f(\xi + 1) = f(\xi)\gamma.$$

4) Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental arbitraria, también lo es $\{f(\xi_\nu)\}$, y se cumple

$$\xi = \operatorname*{Lím}_\nu \xi_\nu,$$

entonces

$$f(\xi) = \operatorname*{Lím}_\nu f(\xi_\nu)."$$

Demostración. De 1) y 3) tenemos

$$f(1) = \delta\gamma, \quad f(2) = \delta\gamma\gamma, \quad f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma, \ldots$$

y puesto que $\delta > 0$, $\gamma > 1$, se cumple

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(\nu) < f(\nu + 1), \ldots$$

Con ello queda totalmente determinada la función $f(\xi)$ para el dominio $\xi < \omega$.

Ahora supongamos que el teorema se cumple para todos los valores de $\xi < \alpha$, donde α es un número de la segunda clase, entonces también se cumple para $\xi \leq \alpha$. Porque si α es del *primer* tipo, se sigue de 3)

$$f(\alpha) = f(\underline{\alpha}_1)\gamma > f(\underline{\alpha}_1);$$

así que se satisfacen también las condiciones 2), 3), 4) para $\xi \leq \alpha$. Pero si α es de la *segunda* clase y $\{\alpha_\nu\}$ es una sucesión fundamental tal que $\operatorname{Lím}_\nu \alpha_\nu = \alpha$, se sigue de 2) que también $\{f(\alpha_\nu)\}$ es una sucesión fundamental y de 4) que $f(\alpha) = \operatorname{Lím}_\nu f(\alpha_\nu)$. Si tomamos otra sucesión fundamental $\{\alpha'_\nu\}$ tal que $\operatorname{Lím}_\nu \alpha'_\nu = \alpha$, entonces por 2) ambas sucesiones fundamentales $\{f(\alpha_\nu)\}$ y $\{f(\alpha'_\nu)\}$ son *correspondientes*; así que $f(\alpha) = \operatorname{Lím}_\nu f(\alpha_\nu)$. El valor $f(\alpha)$ está también en este caso *unívocamente* determinado.

Si α' es un número $< \alpha$, se verifica fácilmente que $f(\alpha') < f(\alpha)$. Así que las condiciones 2), 3), 4) se satisfacen también para $\xi \leq \alpha$. De lo anterior se sigue la validez del teorema para *todos los valores* de ξ.

Dr. Luis Miguel Villegas Silva Depto. Matematicas Universidad Autonoma Metropolitana I Mexico

Pues si hubiese una excepción ξ, para la cual no se satisfaciera el teorema, por el teorema B, §16 habría un *menor* de tales números, que llamamos α. Entonces el teorema sería cierto para $\xi < \alpha$, pero no para $\xi \leq \alpha$, lo que estaría en contradicción con lo recién demostrado.

Por lo tanto, existe *una* función y sólo una en todo el dominio de ξ que satisface las condiciones 1) a 4).

Si otorgamos a la constante δ el valor 1, y se denota la función $f(\xi)$ como

$$\gamma^{\xi},$$

podemos formular el siguiente teorema:

B. *"Si γ es una constante > 1 arbitraria de la primera o segunda clase de números, entonces existe una función totalmente determinada γ^{ξ} de ξ, tal que*

1) $\gamma^0 = 1$.

2) Si $\xi' < \xi''$, entonces $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.

3) Para cada valor de ξ se cumple $\gamma^{\xi+1} = \gamma^{\xi}\gamma$.

4) Si $\{\xi_\nu\}$ una sucesión fundamental, también lo es $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$ y se tiene , cuando $\xi =$ Lím $_\nu\, \xi_\nu$, también

$$\gamma^{\xi} = \operatorname*{Lím}_{\nu} \gamma^{\xi_\nu}.\text{"}$$

Podemos reformular el teorema:

C. *"Si $f(\xi)$ es la función de ξ caracterizada en el teorema A, entonces*

$$f(\xi) = \delta\gamma^{\xi}.\text{"}$$

Demostración. Teniendo en cuenta (24), §14 es fácil cerciorarse de que la función $\delta\gamma^{\xi}$ no sólo satisface las condiciones 1), 2), 3) del teorema A, sino también la condición 4) del mismo. Por la unicidad de la función $f(\xi)$ debe ser idéntica con $\delta\gamma^{\xi}$.

D. *"Si α y β son dos números arbitrarios de la primera o segunda clase de números con excepción del 0, entonces*

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.\text{"}$$

Demostración. Considere la función $\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$. Tomando en cuenta que según la fórmula (23), §14

$$\operatorname*{Lím}_{\nu}(\alpha + \xi_\nu) = \alpha + \operatorname*{Lím}_{\nu} \xi_\nu,$$

reconocemos que $\varphi(\xi)$ satisface las siguientes cuatro condiciones:

1) $\varphi(0) = \gamma^{\alpha}$.

2) Si $\xi' < \xi''$, entonces $\varphi(\xi') < \varphi(\xi'')$.

3) Para cada valor de ξ se cumple $\varphi(\xi + 1) = \varphi(\xi)\gamma$.

4) Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental tal que Lím $_\nu\, \xi_\nu = \xi$, entonces

$$\varphi(\xi) = \operatorname*{Lím}_{\nu} \varphi(\xi_\nu).$$

Según el teorema C se sigue, si ponemos $\delta = \gamma^{\alpha}$, que

$$\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha}\gamma^{\xi}.$$

Si sustituimos aquí $\xi = \beta$, se deduce que

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}.$$

E. *"Si α y β son dos números arbitrarios de la primera o segunda clase de números exceptuando al 0, entonces*

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^{\alpha})^{\beta}.\text{"}$$

Demostración. Consideremos la función $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha\xi}$ y observemos que, según (24), §14, siempre ocurre Lím $_\nu\, \alpha\xi_\nu = \alpha$ Lím $_\nu\, \xi_\nu$, así que basándonos en el teorema D podemos afirmar que:

1) $\psi(0) = 1$.

2) Si $\xi' < \xi''$, entonces $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$.

3) Para cada valor de ξ, $\psi(\xi+1) = \psi(\xi)\gamma^{\alpha}$.

4) Si $\{\xi_\nu\}$ es una sucesión fundamental, también lo es $\{\psi(\xi_\nu)\}$ y se cumple, cuando $\xi = \text{Lím}_\nu\, \xi_\nu$, también $\psi(\xi) = \text{Lím}_\nu\, \psi(\xi_\nu)$.

Del teorema C se deduce, si se sustituye en él $\delta = 1$ y γ^α por γ, que

$$\psi(\xi) = (\gamma^\alpha)^\xi.$$

Sobre la magnitud de γ^ξ respecto a ξ podemos establecer el siguiente teorema:

F. *"Si $\gamma > 1$, para cada valor de ξ se cumple*

$$\gamma^\xi \geq \xi."$$

Demostración. En los casos $\xi = 0$ y $\xi = 1$ el teorema es inmediato. Ahora mostramos que, cuando él se cumple para todos los valores de ξ menores que un número dado $\alpha > 1$, también se cumple para $\xi = \alpha$.

Si α es del *primer* tipo, entonces por hipótesis

$$\underline{\alpha}_1 \leq \gamma^{\underline{\alpha}_1},$$

también

$$\underline{\alpha}_1\gamma \leq \gamma^{\underline{\alpha}_1}\gamma = \gamma^\alpha,$$

por ello

$$\gamma^\alpha \geq \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_1(\gamma - 1) = \underline{\alpha}_1\gamma.$$

Puesto que tanto $\underline{\alpha}_1$ como $\gamma - 1$ son al menos $= 1$ y $\underline{\alpha}_1 + 1 = \alpha$, se deduce

$$\gamma^\alpha \geq \alpha.$$

Si por el contrario α es del *segundo* tipo, a saber,

$$\alpha = \text{Lím}_{\nu}\, \alpha_\nu,$$

entonces, ya que $\alpha_\nu < \alpha$, y de la hipótesis se obtiene

$$\alpha_\nu \leq \gamma^{\alpha_\nu},$$

por lo que también

$$\text{Lím}_{\nu}\, \alpha_\nu \leq \text{Lím}_{\nu}\, \gamma^{\alpha_\nu},$$

es decir,

$$\alpha \leq \gamma^\alpha.$$

Si hubiesen valores de ξ para los cuales

$$\xi > \gamma^\xi,$$

entre ellos existiría uno *menor* (según el teorema B, §16); si lo denotamos con α, tendríamos para $\xi < \alpha$

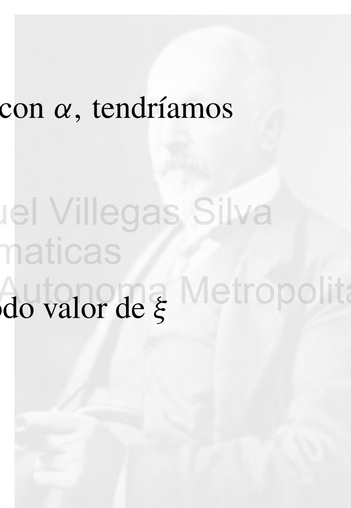
$$\xi \leq \gamma^\xi,$$

mientras que

$$\alpha > \gamma^\alpha,$$

lo que contradice lo antes demostrado. Con ello hemos mostrado que para todo valor de ξ

$$\gamma^\xi \geq \xi.$$



§19.

La forma normal de los números de la segunda clase.

Sea α algún número de la segunda clase. La potencia ω^{ξ} será mayor que α para valores suficientemente grandes de ξ. Este siempre es el caso, de acuerdo con el teorema F, §18, para $\xi > \alpha$, pero en general también se considerarán valores menores de ξ.

Por el teorema B, §16 entre los valores de ξ para los cuales

$$\omega^{\xi} > \alpha,$$

debe existir uno *menor*; lo llamamos β y nos convencemos fácilmente que *no* puede ser un número de la *segunda* clase. En efecto, si lo fuera

$$\beta = \operatorname*{Lím}_{\nu} \beta_{\nu},$$

tendríamos, puesto que $\beta_{\nu} < \beta$,

$$\omega^{\beta_{\nu}} \leq \alpha,$$

por lo que también

$$\operatorname*{Lím}_{\nu} \omega^{\beta_{\nu}} \leq \alpha.$$

Así que

$$\omega^{\beta} \leq \alpha,$$

mientras que se debe cumplir

$$\omega^{\beta} > \alpha.$$

En consecuencia, β es del *primer* tipo. Denotamos β_{-1} con α_0, de tal suerte que $\beta = \alpha_0 + 1$ y podemos afirmar que *existe un número totalmente determinado α_0 de la primera o segunda clase que satisface las condiciones:*

$$\omega^{\alpha_0} \leq \alpha, \quad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha. \tag{1}$$

De la segunda condición deducimos que *no para todo valor finito de ν se cumple*

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leq \alpha,$$

pues en caso contrario se cumpliría también $\operatorname{Lím}_{\nu} \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leq \alpha$.

El *menor número finito ν* para el cual

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha,$$

lo denotamos con $\varkappa_0 + 1$. De (1) se sigue que $\varkappa_0 > 0$.

Por consiguiente, *existe también un número totalmente determinado $\varkappa_0$ de la primera clase de números*, tal que

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 \leq \alpha, \quad \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0 + 1) > \alpha. \tag{2}$$

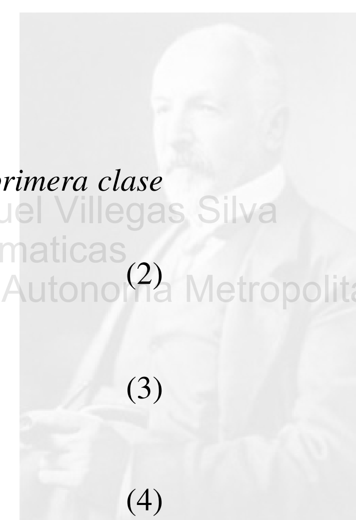
Si hacemos $\alpha - \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \alpha'$, entonces

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha' \tag{3}$$

y

$$0 \leq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \varkappa_0 < \omega. \tag{4}$$

Además, α se puede representar como en (3) *en forma única* con la condición (4). Porque de (3) y (4) se deducen, hacia atras, primero las condiciones (2), y de ellas las condiciones (1).



La condición (1) se satisface sólo por el número $\alpha_0 = \beta_{-1}$, y mediante las condiciones (2) queda completamente determinado el número finito $\varkappa_0$. De (1) y (4) se sigue, considerando el teorema F, §18, que

$$\alpha' < \alpha, \quad \alpha_0 \leq \alpha.$$

Por lo que podemos afirmar la validez del siguiente teorema:

A. *"Cada número α de la segunda clase se puede representar en forma única como*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha',$$

con

$$0 \leq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad 0 < \varkappa_0 < \omega;$$

α' siempre es menor que α, mientras que α_0 es menor o igual que α."

Si α' es un número de la *segunda clase*, podemos utilizar el teorema A y obtener

$$\alpha' = \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'', \tag{5}$$

$$0 \leq \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \quad 0 < \varkappa_1 < \omega,$$

por lo que

$$\alpha_1 < \alpha_0, \quad \alpha'' < \alpha'.$$

En general, obtenemos la siguiente sucesión de ecuaciones

$$\alpha'' = \omega^{\alpha_2}\varkappa_2 + \alpha''', \tag{6}$$

$$\alpha''' = \omega^{\alpha_3}\varkappa_3 + \alpha^{IV}. \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Esta sucesión no puede ser infinita, debe interrumpirse. Porque los números $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ son decrecientes según su magnitud, es decir,

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' > \cdots$$

Si una sucesión decreciente de números transfinitos fuese infinita, entonces ninguno de ellos sería el menor; esto es imposible según el teorema B, §16. Por lo tanto, se debe cumplir

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0$$

para un cierto valor finito de τ. Si relacionamos las ecuaciones (3), (5), (6), (7), obtenemos el teorema:

B. *"Cada número α de la segunda clase se puede representar en forma única como*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\tau$ son números de la primera o segunda clase que satisfacen las condiciones

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\tau \geq 0,$$

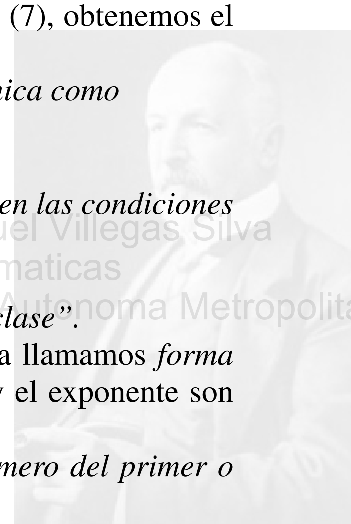
mientras que $\varkappa_0, \varkappa_1, \varkappa_\tau, \tau + 1$ son números, distintos de cero, de la primea clase".

La forma que hemos presentado para los números de la segunda clase la llamamos *forma normal*; α_0 es el *"grado"*, α_τ el *"exponente"* de α; para $\tau = 0$ el grado y el exponente son iguales entre sí.

Dependiendo de si el exponente α_τ es igual o mayor que 0, α es un número del primer o segundo tipo.

Consideremos otro número β en forma normal

$$\beta = \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma. \tag{8}$$



Tanto para comparar α con β como para sumarlos o restarlos sirven la fórmulas

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha'}\varkappa = \omega^{\alpha'}(\varkappa' + \varkappa), \tag{9}$$

$$\omega^{\alpha'}\varkappa' + \omega^{\alpha''}\varkappa'' = \omega^{\alpha''}\varkappa'' \quad \text{para } \alpha < \alpha'. \tag{10}$$

aquí $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ son números finitos.

Estas son generalizaciones de las fórmulas (3) y (2), §17.

Para la formación del producto $\alpha\beta$ son importantes las siguientes fórmulas:

$$\alpha\lambda = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau, \quad 0 < \lambda < \omega, \tag{11}$$

$$\alpha\omega = \omega^{\alpha_0+1}, \tag{12}$$

$$\alpha\omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0+\beta'}, \quad \beta' > 0. \tag{13}$$

La exponenciación α^β se efectua con facilidad mediante la siguiente fórmula:

$$\alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0\lambda}\varkappa_0 + \cdots, \qquad 0 < \lambda < \omega. \tag{14}$$

Los miembros a la derecha tiene grado menor que el primero. De esto se sigue fácilmente que las sucesiones fundamentales $\{\alpha^\lambda\}$ y $\{\omega^{\alpha_0\lambda}\}$ son correspondientes, de tal forma que

$$\alpha^\omega = \omega^{\alpha_0\omega}, \quad \alpha_0 > 0. \tag{15}$$

Por lo que, como consecuencia del teorema E, §18:

$$\alpha^{\omega^{\beta'}} = \omega^{\alpha_0\omega^{\beta'}}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \beta' > 0. \tag{16}$$

Con ayuda de estas fórmulas se pueden demostrar los siguientes teoremas:

C. *"Si los primeros miembros $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$, $\omega^{\alpha_0}\lambda_0$ de las formas normales de los números α y β no son iguales, entonces α es mayor o menor que β, dependiendo de si $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$ es menor o mayor que $\omega^{\beta_0}\lambda_0$. Pero si se tiene*

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0,\ \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1, \ldots \omega^{\alpha_\rho}\varkappa_\rho = \omega^{\beta_\rho}\varkappa_\rho,$$

y si $\omega^{\alpha_{\rho+1}}\varkappa_{\rho+1}$ es menor o mayor que $\omega^{\beta_{\rho+1}}\lambda_{\rho+1}$, entonces también α es menor o mayor que β, respectivamente."

D. *Si el grado α_0 de α es menor que el grado β_0 de β, entonces*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Si $\alpha_0 = \beta_0$, entonces

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(\varkappa_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Pero si

$$\alpha_0 > \beta_0,\ \alpha_1 > \beta_0, \ldots \alpha_\rho \geq \beta_0, \alpha_{\rho+1} < \beta_0,$$

entonces

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \cdots + \omega^{\alpha_\rho}\varkappa_\rho + \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma."$$

E. *"Si β es del segundo tipo ($\beta_\sigma > 0$), entonces*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma = \omega^{\alpha_0}\beta,$$

pero si β es del primer tipo ($\beta_\sigma = 0$), entonces

$$\begin{aligned}\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1} + \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda_\sigma \\ + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau."\end{aligned}$$

F. *"Si β es del segundo tipo ($\beta_\sigma > 0$), entonces*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta};$$

pero si β es del primer tipo ($\beta_\sigma = 0$), a saber, $\beta = \beta' + \lambda_\sigma$, donde β' es del segundo tipo, entonces se cumple

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0 \beta'} \alpha^{\lambda_\sigma}."$$

G. *Cada número α de la segunda clase se puede representar en forma única como el producto:*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \varkappa_\tau (\omega^{\gamma_1} + 1) \varkappa_{\tau-1} (\omega^{\gamma_2} + 1) \varkappa_{\tau-2} \cdots (\omega^{\gamma_\tau} + 1) \varkappa_0,$$

y se cumple

$$\gamma_0 = \alpha_\tau, \gamma_1 = \alpha_{\tau-1} - \alpha_\tau, \gamma_2 = \alpha_{\tau-2} - \alpha_{\tau-1}, \ldots \gamma_\tau = \alpha_0 - \alpha_1,$$

mientras que $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ tienen el mismo significado que en la forma normal. Los factores $\omega^\gamma + 1$ son irreducibles."

H. *"Cada número α del segundo tipo perteneciente a la segunda clase de números se puede representar en forma única en la forma:*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0} \alpha',$$

donde $\gamma_0 > 0$ y α' es un número del primer tipo perteneciente a la primera o segunda clase."

J. *"Para que dos números α y β de la segunda clase satisfagan la relación*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

es necesario y suficiente que tengan la forma

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma\nu,$$

donde μ y ν son números de la primera clase de números".

K. *"Para que dos números α y β de la segunda clase, ambos del primer tipo, satisfagan la relación*

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

es necesario y suficiente que sean de la forma

$$\alpha = \gamma^\mu, \quad \beta = \gamma^\nu,$$

donde μ y ν son números de la primera clase."

Para ejemplificar la trascendencia de la *forma normal* y de la directamente relacionada *forma producto* de los números de la segunda clase de números, se derivarán las demostraciones de los teoremas J y K.

De la suposición

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

deducimos primero que el grado α_0 de α debe ser igual al grado β_0 de β. Si tuviesemos $\alpha_0 < \beta_0$, se cumpliría (según el teorema D) que

$$\alpha + \beta = \beta,$$

de donde se sigue que

$$\beta + \alpha = \beta,$$

lo que no es posible, pues por (2) §14

$$\beta + \alpha > \beta.$$

Por ello podemos hacer

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \quad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \beta',$$

donde el grado de los números α' y β' son menores que α_0, μ y ν son números finitos distintos de 0.

Por el teorema D se cumple

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta', \;\; \beta + \alpha = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha',$$

Dr. Luis Miguel Villegas Silva
Depto. Matematicas
Universidad Autonoma Metropolitana I
Mexico

así que

$$\omega^{\alpha_0}(\mu+\nu)+\beta'=\omega^{\alpha_0}(\mu+\nu)+\alpha'.$$

Según el teorema D, §14 se tiene

$$\beta'=\alpha'.$$

Con ello logramos

$$\alpha=\omega^{\alpha_0}\mu+\alpha', \quad \beta=\omega^{\alpha_0}\nu+\alpha',$$

y si se hace

$$\omega^{\alpha_0}+\alpha'=\gamma,$$

por (11)

$$\alpha=\gamma\mu, \quad \beta=\gamma\nu.$$

Por otra lado, supongamos que dos números de la segunda clase de números del *primer tipo* α y β satisfacen la condición

$$\alpha\beta=\beta\alpha$$

y que

$$\alpha>\beta.$$

Representamos ambos números, según el teorema G, en su forma producto y sean

$$\alpha=\delta\alpha', \quad \beta=\delta\beta',$$

donde α' y β' no tienen factores izquierdos extremos en común (excepto 1).

Entonces se cumple

$$\alpha'>\beta'$$

y

$$\alpha'\delta\beta'=\beta'\delta\alpha'.$$

Todos los números involucrados y los que aparezcan en lo sucesivo son del *primer tipo*, pues esto se supuso de α y β.

La última ecuación (teniendo en cuenta el teorema G) permite reconocer que α' y β' no pueden ser *ambos transfinitos*, pues en tal caso tendrían un factor izquierdo extremo comúm. Pero tampoco pueden ser *ambos finitos*; porque en tal caso, si δ es transfinito y si $\varkappa$ es el factor izquierdo finito extremo de δ, entonces

$$\alpha'\varkappa=\beta'\varkappa,$$

y también

$$\alpha'=\beta'.$$

La única posibilidad que queda es que

$$\alpha'>\omega, \quad \beta'<\omega.$$

Pero el número finto β' debe ser 1:

$$\beta'=1,$$

pues de lo contrario estaría contenido como factor en el factor extremo izquierdo finito de α'.

Llegamos al resultado $\beta=\delta$, por consiguiente

$$\alpha=\beta\alpha',$$

donde α' es un número del primer tipo perteneciente a la segunda clase de números que debe ser menor que α:

$$\alpha'<\alpha.$$

Entre α' y β se cumple la relación

$$\alpha'\beta=\beta\alpha'.$$

Si por lo tanto, $\alpha' > \beta$, se deducen de la misma forma la existencia de un número transfinito del *primer* tipo $\alpha'' < \alpha'$, tal que

$$\alpha' = \beta\alpha'', \quad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Si también $\alpha'' > \beta$, existe uno de tales números $\alpha''' < \alpha''$, tal que

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \quad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

etcétera.

La sucesión decreciente de números $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ debe *interrumpirse*, según el teorema B, §16. En consecuencia, se debe cumplir, para un cierto índice finito ρ_0,

$$\alpha^{(\rho_0)} \leq \beta.$$

Si

$$\alpha^{(\rho_0)} = \beta,$$

entonces

$$\alpha = \beta^{\rho_0+1}, \quad \beta = \beta;$$

quedaría demostrado el teorema K y se cumpliría

$$\gamma = \beta, \quad \mu = \rho_0 + 1, \quad \nu = 1.$$

Pero si

$$\alpha^{(\rho_0)} < \beta,$$

hacemos

$$\alpha^{(\rho_0)} = \beta_1$$

y tenemos

$$\alpha = \beta^{\rho_0}\beta_1, \quad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \quad \beta_1 < \beta.$$

Por lo tanto, existe un número finito ρ_1 tal que

$$\beta = \beta_1^{\rho_1}\beta_2, \quad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \quad \beta_2 < \beta_1.$$

En general, se obtiene en forma análoga

$$\beta_1 = \beta_2^{\rho_2}\beta_3, \quad \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2, \quad \beta_3 < \beta_2,$$

etcétera.

También la sucesión decreciente de números $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ debe *interrumpirse*, según el teorema B, §16.

En consecuencia, existe un número finito $\varkappa$ tal que

$$\beta_{\varkappa-1} = \beta_{\varkappa}^{\rho_{\varkappa}}.$$

Si hacemos

$$\beta_{\varkappa} = \gamma,$$

entonces

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \quad \beta = \gamma^{\nu},$$

donde μ y ν son el numerador y denominador de la cadena fraccionaria

$$\frac{\mu}{\nu} = \rho_0 + \cfrac{1}{\rho_1 + \ddots + \cfrac{1}{\rho_k}}.$$

§20.

Los ε-números de la segunda clase.

El grado α_0 de un número α nunca es mayor que α, como se desprende de la forma normal

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots, \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots, \quad o < \varkappa_\nu < \omega \tag{1}$$

teniendo en cuenta el teorema F; la pregunta es si existen números α para los cuales $\alpha_0 = \alpha$.

En tal caso se debe reducir la forma normal de α al primer miembro y éste debe ser $= \omega^\alpha$, es decir, α debe ser la raíz de la ecuación

$$\omega^\xi = \xi. \tag{2}$$

Por otro lado cada raíz de esta ecuación debe tener forma normal ω^α; su grado sería igual a ella misma.

Los números de la segunda clase que son iguales a su grado coinciden con las raíces de la ecuación (2). Nuestra tarea es determinar todas esas raíces. Para distinguirlas de los números restantes, las llamamos *ε-números de la segunda clase"*.

Que realmente existen tales números, se deduce del siguiente Teorema:

A. *"Si γ es un número de la primera o segunda clase que no satisface la ecuación (2), entonces determina una sucesión fundamental $\{\gamma_\nu\}$ mediante las ecuaciones*

$$\gamma_1 = \omega^\gamma, \quad \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \ldots \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \ldots$$

El límite Lím $_\nu\, \gamma_\nu = E(\nu)$ de esta sucesión fundamental siempre es un ε-número."

Demostración. Puesto que γ no es un ε-número, entonces $\omega^\gamma > \gamma$, es decir, $\gamma_1 > \gamma$. De acuerdo con el teorema B, §18 se cumple también $\omega^{\gamma_1} > \omega^\gamma$, esto es, $\gamma_2 > \gamma_1$ y en la misma forma se deduce que $\gamma_3 > \gamma_2$, etcétera. La sucesión $\{\gamma_\nu\}$ es por consiguiente una sucesión fundamental. Su límite, que es una función de γ, lo llamamos $E(\gamma)$ y se cumple

$$\omega^{E(\gamma)} = \operatorname*{Lím}_\nu \omega^{\gamma_\nu} = \operatorname*{Lím}_\nu \gamma_{\nu+1} = E(\gamma).$$

Por ello $E(\gamma)$ es un ε-número.

B. *"El número $\varepsilon_0 = E(1) = $ Lím $_\nu\, \omega_\nu$, donde*

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \quad \omega_3 = \omega^{\omega_2}, \ldots \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots$$

es el menor de todos los ε-números."

Demostración. Sea ε' un ε-número, tal que

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Ya que $\varepsilon' > \omega$, etonces $\omega^{\varepsilon'} > \omega^\omega$, es decir, $\varepsilon' > \omega_2$. De aquí se sigue igualmente que $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_2}$, es decir, $\varepsilon' > \omega_3$, etcétera.

En general tenemos

$$\varepsilon' > \omega_\nu,$$

por lo que

$$\varepsilon' \geq \operatorname*{Lím}_\nu \omega_\nu,$$

es decir,

$$\varepsilon' \geq \varepsilon_0.$$

Así que $\varepsilon_0 = E(1)$ es el menor de todos los ε-números.

C. *"Si ε' es un ε-número, ε'' el siguiente ε-número y γ cualquier número entre ellos*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon'',$$

entonces $E(\gamma) = \varepsilon''$."

Demostración. De

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

se sigue que

$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^{\gamma} < \omega^{\varepsilon''},$$

es decir,

$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''$$

etcétera. De esto se deduce igualmente

$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon',$$

etcétera. En general tenemos

$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$

por lo que

$$\varepsilon' < E(\gamma) \leq \varepsilon''.$$

Según el Teorema A, $E(\gamma)$ es un ε-número. Ya que ε'' es el sucesor de ε' entre los ε-números, no puede ocurrir que $E(\gamma) < \varepsilon''$, por lo que se debe cumplir

$$E(\gamma) = \varepsilon''.$$

Dado que $\varepsilon' + 1$ por definición no puede ser un ε-número, pues todos los ε-números, como se sigue de la ecuación que los define $\xi = \omega^{\xi}$, son del *segundo tipo*, $\varepsilon' + 1$ es con seguridad menor que ε'', con lo que tenemos el teorema:

D. *"Si ε' es un ε-número, entonces $E(\varepsilon' + 1)$ es el siguiente ε-número."*

Al menor ε-número ε_0 le sigue el que llamaremos ε_1,

$$\varepsilon_1 = E(\varepsilon_0 + 1),$$

y a éste el siguiente

$$\varepsilon_2 = E(\varepsilon_1 + 1),$$

etcétera.

En general, tenemos la fórmula recursiva para el $(\nu + 1)$-ésimo ε-número respecto a la magnitud:

$$\varepsilon_\nu = E(\varepsilon_{\nu-1} + 1). \tag{3}$$

Pero ya que claramente la sucesión infinita

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

de ninguna manera abarca a todos los ε-números, se desprende el siguiente teorema:

E. *"Si $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ es una sucesión infinita de ε-números tal que*

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' \cdots \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)} \cdots,$$

entonces también $\text{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}$ es un ε-número, a saber, el ε-número sucesor inmediato a todos los $\varepsilon^{(\nu)}$."

Demostración.

$$\omega^{\text{Lím}_\nu \varepsilon^{(\nu)}} = \underset{\nu}{\text{Lím}}\, \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \underset{\nu}{\text{Lím}}\, \varepsilon^{(\nu)}.$$

Que $\text{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}$ es el ε-número *sucesor inmediato* de todos los $\varepsilon^{(\nu)}$ se deduce de que $\text{Lím}_\nu\, \varepsilon^{(\nu)}$ es el número *sucesor inmediato de la segunda clase* de todos los $\varepsilon^{(\nu)}$.

F. *"La totalidad de los ε-números de la segunda clase ordenados según su magnitud conforma un conjunto bien ordenado de tipo Ω de la segunda clase de números ordenados según la magnitud por lo que tiene la cardinalidad álef uno."*

Demostración. La totalidad de los ε-números de la segunda clase conforma, según el teorema C, §16 ordenados según su magnitud, un conjunto bien ordenado

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots \varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega+1}, \ldots \varepsilon_{\alpha'}, \ldots \tag{4}$$

cuya forma de construirse se expresa en los teorema D y E.

Si el índice α' no recorriese todos los números de la segunda clase de números, debería existir un menor número α que no alcanzara. Esto se opondría al teorema D, cuando α fuera del primer tipo, y al teorema E, cuando α fuera del segundo tipo. Por lo tanto, α' toma como valores todos los números de la segunda clase de números.

Si denotamos con Ω el tipo de la segunda clase de números, entonces el tipo de (4) es

$$\omega + \Omega = \omega + \omega^2 + (\Omega - \omega^2);$$

pero como $\omega + \omega^2 = \omega^2$, se sigue que

$$\omega + \Omega = \Omega.$$

Por consiguiente, también

$$\overline{\omega + \Omega} = \overline{\Omega} = \aleph_1.$$

G. *"Si ε es un ε-número y α un número arbitrario de la primera o segunda clase de números menor que ε:*

$$\alpha < \varepsilon,$$

entonces ε satisface las tres ecuaciones

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha^{\varepsilon} = \varepsilon."$$

Demostración. Si α_0 es el grado de α, entonces $\alpha_0 \leq \alpha$, y como $\alpha < \varepsilon$ también se cumple $\alpha_0 < \varepsilon$. El grado de $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$ es ε; así que α tiene un grado menor que ε, por lo que según el teorema D, §19

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon,$$

de donde se sigue también

$$\alpha_0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Por otro lado, por las fórmulas (13), §19 tenemos

$$\alpha\varepsilon = \alpha\omega^{\varepsilon} = \omega^{\alpha_0 + \varepsilon} = \omega^{\varepsilon} = \varepsilon,$$

de donde se sigue también

$$\alpha_0\varepsilon = \varepsilon.$$

Finalmente, de la fórmula (16), §19 tenemos

$$\alpha^{\varepsilon} = \alpha^{\omega^{\varepsilon}} = \omega^{\alpha_0\omega^{\varepsilon}} = \omega^{\alpha_0\varepsilon} = \omega^{\varepsilon} = \varepsilon.$$

H. *"Si α es un número de la segunda clase de números, la ecuación*

$$\alpha^{\xi} = \xi,$$

no tienen más raíces que los ε-números mayores que α."

Demostración. Sea β una raíz de la ecuación

$$\alpha^{\xi} = \xi,$$

así

$$\alpha^{\beta} = \beta,$$

por lo que se sigue de esta fórmula que

$$\beta > \alpha.$$

Por otro lado, β debe ser del segundo tipo, de lo contrario tendríamos

$$\alpha^{\beta} > \beta.$$

En consecuencia, tenemos, por el teorema F, §19

$$\alpha^{\beta} = \omega^{\alpha_0\beta},$$

por ello

$$\omega^{\alpha_0\beta} = \beta.$$

Según el teorema F, §18

$$\omega^{\alpha_0\beta} \geq \alpha_0\beta,$$

así que

$$\beta \geq \alpha_0\beta.$$

Pero no puede ocurrir que $\beta > \alpha_0\beta$; en consecuencia

$$\alpha_0\beta = \beta,$$

y por ello

$$\omega^{\beta} = \beta.$$

Por lo tanto, β es aun ε-número mayor que α.